Manual de Diseño y Análisis de Experimentos

Preparado Por:

David Gonzales, Ph. D.

Cynthia Rodríguez, MS. Student

Ángela Anaya, ME.

SECCIONES

Sección 1: Principios básicos, Definiciones y Experimentos de un solo factor aleatorio.

1. Principios Básicos

Para iniciar en el curso de Diseño de experimentos, es necesario tener algunos conceptos claros en la parte de probabilidad y estadística. A continuación se presentan los conceptos más relevantes.

Estadísticas

Pueden ser

Descriptivas: donde se describe el comportamiento de unos datos mediante estimados y algunos métodos gráficos.

Inferenciales: donde se modelan patrones a partir de unos datos, haciendo inferencias a partir de métodos como pruebas de hipótesis.

<u>Parámetros:</u> describen la población de elementos. Son tomados como la verdad. Como ejemplo se puede mencionar la media poblacional o μ . Un censo poblacional es un ejemplo donde se toma la población completa y a partir de ella se sacan parámetros que la describan.

<u>Estimados</u>: describen una muestra tomada de la población de elementos. Generalmente se trabaja con muestras de elementos de una población en cuestión. Las muestras se describen entonces por los estimados; para el caso de la media poblacional μ, su estimado es la media muestral $\overline{X}$. Los estimados se clasifican en medidas de tendencia central y medidas de dispersión:

Sección 1: Principios básicos, Definiciones y Experimentos de un solo factor aleatorio.

Medidas de tendencia central:

Promedio ($\bar{x}$)	Mediana ($\tilde{x}$)	Moda
↓	↓	↓
Tiene un inconveniente y es que puede ser influenciado por datos extremos.	Dato central cuando la muestra esta organizada de manera ascendente	Dato que ocurre con mayor frecuencia

Medidas de dispersión:

Varianza (σ^2)	Desviación (σ) estándar	Rango (R_i)
↓	↓	↓
Medida de ruido. Cuan distintas son las observaciones, promedia la distancia de cada observación de la muestra a su promedio.	Usada para ver la dispersión de los datos a su media	Diferencia entre la observación máxima y minima de la muestra

En diseño de experimentos se hacen análisis y se toman decisiones basándose en las hipótesis planteadas. A continuación se explican algunos conceptos concernientes a las pruebas de hipótesis.

Valor P (P value)

Se define como el nivel mínimo de significancia al cual la hipótesis nula Ho sería rechazada. En el análisis de varianza con que se analiza el experimento, se tienen en cuenta el valor P y el valor de la distribución F. Las tomas de decisión se dan de acuerdo a:

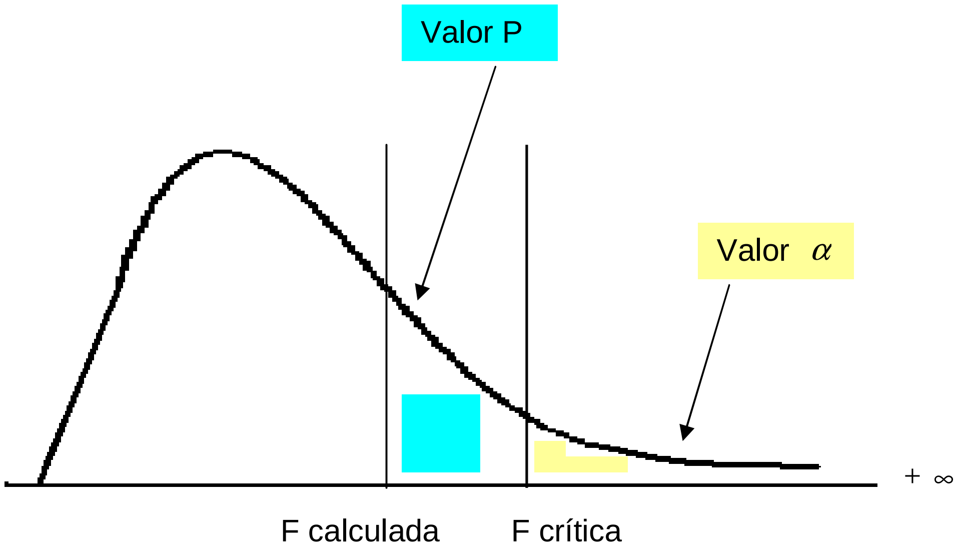
Si $P < \alpha$ Se rechaza Ho

Si $P > \alpha$ No se rechaza Ho

Si $F_{calculada} > F_{critica}$ Se rechaza Ho

Si $F_{calculada} < F_{critica}$ No se rechaza Ho

Para ilustrar una toma de decisión, se tiene la siguiente figura:



La figura muestra que la hipótesis nula Ho no puede ser rechazada debido a que la F calculada es menor a la F crítica y de igual manera el valor P es menor al nivel de significancia alfa. El valor P se puede interpretar como la posibilidad de que la hipótesis nula no sea rechazada; magnitudes altas del mismo se asocian con no poder rechazar la hipótesis nula. La distribución F presume que las variables analizadas tienen un comportamiento Gausiano o normal. La misma se calcula como el promedio de cuadrados de los tratamientos, entre el promedio de cuadrados del error (el promedio de cuadrados usa la suma de cuadrados entre los grados de libertad).

Los programas estadísticos como Minitab, dan los valores para P y F en el resumen mostrado al realizar un análisis de varianza. El investigador usualmente toma la decisión basado en el valor P por comodidad, esto porque él mismo decide el nivel de significancia de la prueba y no entra en la necesidad de buscar un valor de F crítico en tablas.

Pruebas de hipótesis estadísticas

Las hipótesis estadísticas son supuestos hechos por el investigador acerca de cierto parámetro como la media o la desviación estándar, de una o más poblaciones de interés. La estructura de las pruebas de hipótesis está dada por la formulación de dos términos:

Ho: $\mu = \mu_o$ Hipótesis nula que establece el valor exacto del parámetro que se desea probar

H1: $\mu \neq \mu_o$ Hipótesis alterna que establece la posibilidad de que el valor del parámetro se encuentre entre una serie de valores distintos al establecido en Ho. (formulación dada para hipótesis alterna de dos colas)

$$\left.\begin{array}{l} \mu < \mu_o \\ \mu > \mu_o \end{array}\right\} \text{Formulación para hipótesis alternas de una cola}$$

No rechazar la hipótesis nula implica que la muestra analizada no ofrece suficiente evidencia para decir que la misma no pueda ser cierta. Sin embargo, si ésta es rechazada, la prueba entonces ofrece suficiente evidencia para decir que la misma no es cierta. Cuando se rechaza Ho, se da paso a la aceptación de H_1.

Para realizar una prueba de hipótesis se debe tener en cuenta los siguientes pasos:

1. Establecer Ho (ej: que no exista diferencia entre las medias de los niveles de un factor o variable de entrada)
2. Establecer H_1 (ej: que exista diferencia entre las medias de los niveles de un factor o variable de entrada)
3. Establecer α que es el valor que marca el límite entre aceptación y rechazo.
4. Seleccionar el estadístico de prueba (ej: la media, es decir, la función de la muestra aleatoria que se utiliza para tomar una decisión)

5. Establecer la región critica
6. Calcular el valor de la estadística de prueba para la muestra analizada
7. Comparar la estadística de prueba con la región crítica y tomar una decisión en cuanto a si se rechaza o no Ho.

Cuando se realizan pruebas de hipótesis se puede caer en dos tipos de errores:

- Error tipo I: Rechazar Ho cuando no debió ser rechazada. Para este error se define la probabilidad α, siendo ésta, la probabilidad de rechazar algo dado que estaba bueno o de rechazar dado que debí aceptar. Este error se considera como el error del productor porque se rechaza algo del lote de producción que debió ser aceptado. α es seleccionado por el investigador.

- Error tipo II: No rechazar Ho cuando debió ser rechazada. Para este error se define la probabilidad β, siendo ésta, la probabilidad de aceptar algo dado que debió ser rechazado. Así este error se considera como el riesgo del consumidor, ya que al cometerse, el productor acepta algo que debió ser rechazado y lo lanza a la venta estando defectuoso. β solo se controla a través del tamaño de muestra. Si el investigador disminuye α entonces β aumenta porque están inversamente relacionados pero la suma de $\alpha + \beta \neq 1$.

	Ho es cierto	**Ho es falso**
No rechazo Ho	Decisión correcta	Error tipo II
Rechazo Ho	Error tipo I	Decisión correcta

Adicional a lo anterior, es importante definir el potencial de la prueba (1-β), siendo este la probabilidad de rechazar Ho cuando debió rechazarse. Experimentalmente con el fin de aumentar el potencial de la prueba en experimentos corridos de manera completa, se hace una prueba de poder para determinar el número de replicas que se deben correr para obtener un poder aceptable (este fluye entre 0.7 y 1 aproximadamente. Cuando el poder es menor a este, se corre un riesgo mayor de aceptar Ho cuando debió rechazarse y por ende un fallo en la respuesta del experimento).

Ejemplo 1

El tiempo promedio que tardan los estudiantes en registrarse para las clases de otoño en una universidad ha sido de 50 minutos con una desviación estándar de 10 minutos. Se está probando un nuevo método de registro con computadoras modernas. Si se toma una muestra aleatoria de 12 estudiantes que tuvieron un tiempo de registro promedio de 42 minutos con una desviación estándar de 11.9 minutos quienes se registraron con el nuevo método de registro. Pruebe la hipótesis de que la media poblacional es ahora menor a 50 minutos usando un nivel de significancia de 0.05 y de 0.01. Asuma que los datos de tiempo se distribuyen normalmente.

Solución

En este caso en particular se tiene la desviación estándar muestral conocida, de manera que se trabaja entonces con la estadística t.

La hipótesis del investigador H_1 es que la media del tiempo que tardan los estudiantes en registrarse sea menor a la anterior que era 50 minutos así:

$$H_0 : \mu = 50 \min$$
$$H_1 : \mu < 50 \min$$

Como no se conoce la desviación poblacional para el nuevo método entonces se debe usar la estadística t ya que los datos que se tienen son de una muestra proveniente de una población mayor:

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} = \frac{42 - 50}{11.9 / \sqrt{12}} = -2.33$$

Para la toma de decisión se tiene en cuenta que:

Si $t_{calculada} < t_{critica}$ se rechaza Ho

Si $t_{calculada} > t_{critica}$ no hay suficiente evidencia para rechazar Ho

Se procede entonces a buscar los valores de t crítica en la tabla, se debe tener en cuenta que la tabla pide el valor correspondiente al nivel de significancia y el valor correspondiente a los grados de libertad:

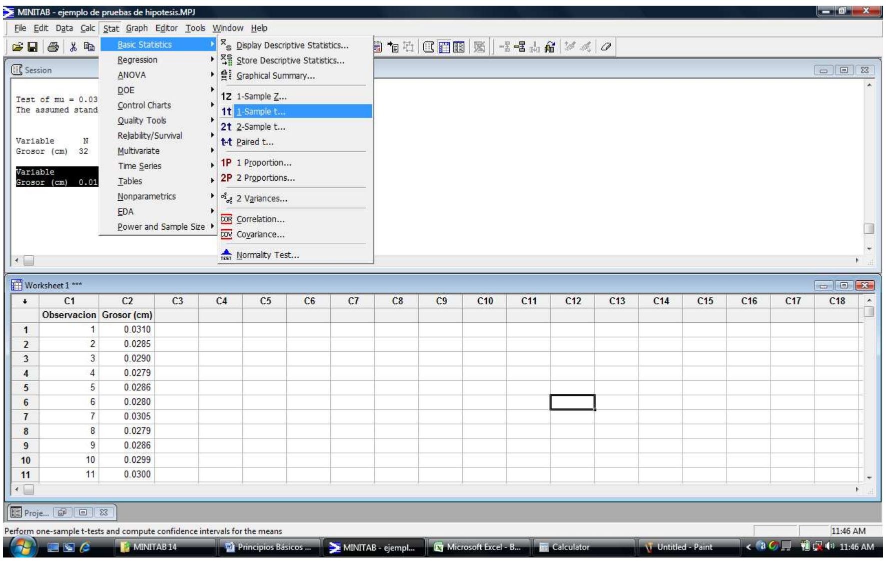
Con un alfa de 0.05 y 11 grados de libertad T = -1.796

Con un alfa de 0.01 y 11 grados de libertad T = -2.718

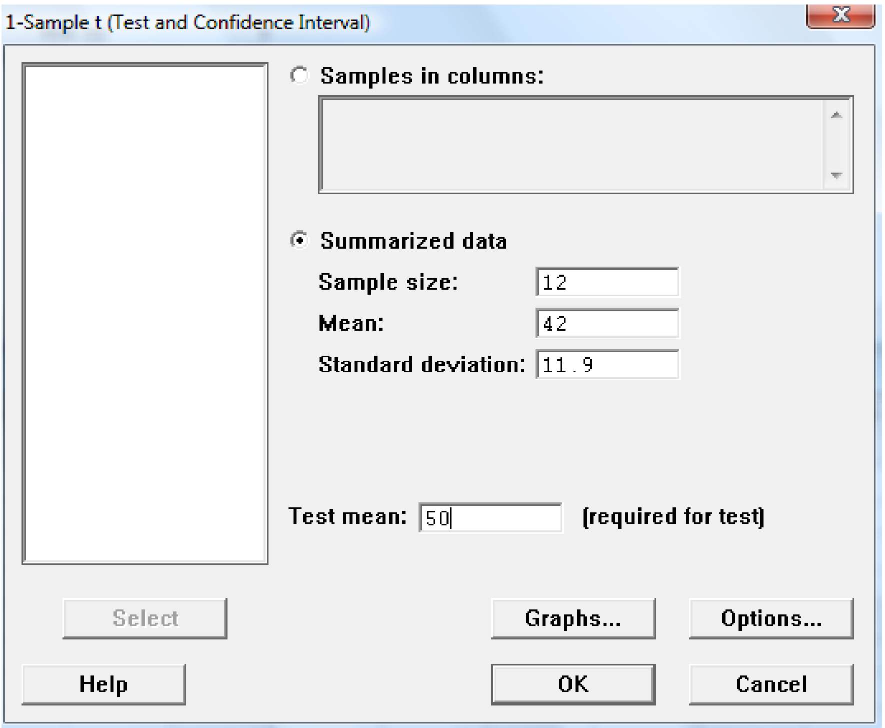
A un nivel de significancia del 0.05 se rechaza H_0 porque t calculada es menor a t critica, pero a un nivel de significancia de 0.01 no hay suficiente evidencia para rechazar H_0 porque t calculada es mayor a t critica. Esto indica que hay gran probabilidad de que la media poblacional sea menor que 50 pero no es mucha la diferencia y quizá no es suficiente garantía para soportar el costo que requiere la compra del nuevo método de registro.

Procedimiento con Minitab:

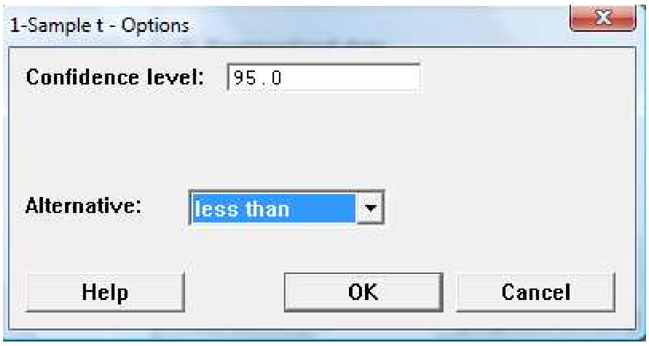
1. En el menú de stat en basic statistics se hace click sobre la opción 1 sample t:



2. Se despliega una ventana donde se ingresan los datos para la media muestral, la desviación estándar muestral y el tamaño de muestra, ya que en este caso no se tienen los datos sino un resumen de ellos:



3. El problema pide que se pruebe que la media del nuevo procedimiento sea menor a la media del procedimiento anterior, es decir, se hace una prueba de hipótesis de una cola. Para esto se hace click sobre el botón options donde se despliega una ventana que permite poner el nivel de confianza que en este caso es de 95 ya que el nivel de significancia inicial a probar es α = 5%. En la casilla de alternative se despliegan las opciones y se escoge la opción less than para que se pruebe que la media sea menor a 50.



4. Al hacer ok se obtienen los siguientes resultados:

One-Sample T

```
Test of mu = 50 vs < 50


                                        95%
                                      Upper
 N     Mean    StDev  SE Mean     Bound      T      P
12  42.0000  11.9000   3.4352   48.1693  -2.33  0.020
```

El resultado despliega un valor de t de -2.33 igual al obtenido con los cálculos manuales. En este caso con un nivel de significancia de 0.05 se obtiene un valor p de 0.02, siendo este menor a 0.05 de manera que se rechaza la hipótesis nula y entonces el tiempo promedio que tardan los estudiantes en registrarse con el procedimiento nuevo es menor al que se tomaban con el procedimiento anterior.

Para el caso del nivel de significancia de 0.01 se hace el mismo procedimiento anteriormente descrito pero cambiando el nivel de confianza a 99.0%.

Ejemplo 2

La especificación para el grueso de una tableta es de 0.03 mm. Se sabe que el grosor de las tabletas sigue una distribución normal con $\sigma = 0.001$. Se toma una muestra aleatoria de 32 tabletas del proceso y se les mide el grosor. El ingeniero del proceso desea saber si es correcto decir que el promedio de las tabletas en el lote es de 0.03 mm.

A continuación se muestra una tabla con los datos de los grosores para un lote de 32 tabletas:

Observacion	Grosor (mm)	Observacion	Grosor (mm)
1	0.031	17	0.0283
2	0.0285	18	0.0291
3	0.029	19	0.0287
4	0.0279	20	0.0291
5	0.0286	21	0.0309
6	0.028	22	0.0298
7	0.0305	23	0.0313
8	0.0279	24	0.03
9	0.0286	25	0.0289
10	0.0299	26	0.0299
11	0.03	27	0.0279
12	0.0295	28	0.0311
13	0.031	29	0.0293
14	0.0316	30	0.032
15	0.0283	31	0.0278
16	0.0294	32	0.0319

En este caso particular, se conoce la desviación estándar poblacional y los datos tienen una distribución normal. Esto indica que se debe utilizar el estadístico de prueba Z.

Se desea entonces probar si la media poblacional μ es 0.03 mm. Para esto se utiliza una prueba de hipótesis de dos colas, teniendo en cuenta que la hipótesis del investigador es negar que la media poblacional sea de 0.03 mm; la prueba de hipótesis se formula entonces así:

$$Ho : \mu = 0.03mm$$
$$H_1 : \mu \neq 0.03mm$$

Como la prueba es de dos colas, el rango de aceptación estará dado por dos valores críticos de la estadística Z o dos valores críticos de P-value. Ahora el investigador define que su nivel de significancia α es de 0.05 y procede a realizar las pruebas:

El estimador de punto para la media poblacional μ es $\overline{X}$, este se halla sacando el promedio de los grosores tomados en la muestra.

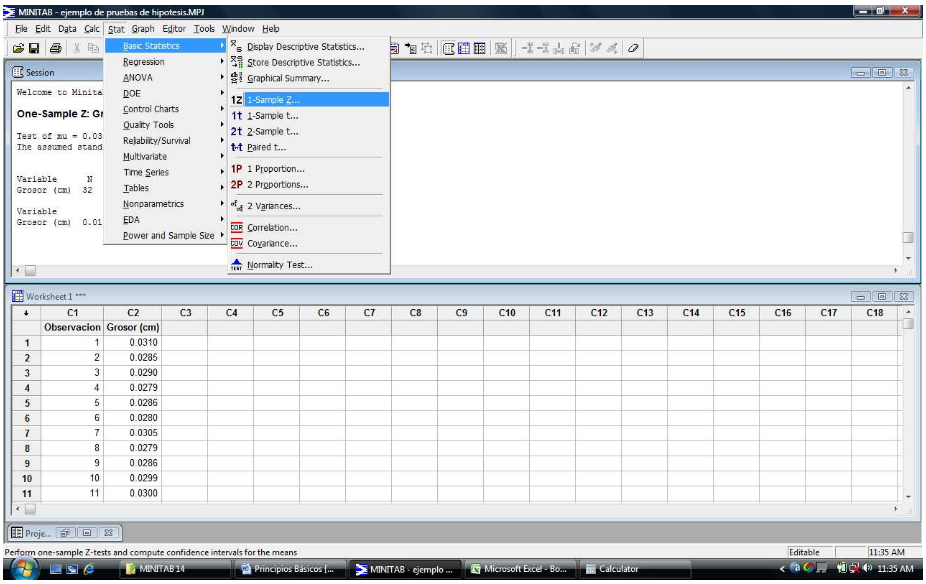
$$\overline{X} = \frac{0.031 + 0.0285 + 0.029... + 0.0319}{32} = 0.029553$$

Teniendo en cuenta que el estadístico de prueba Z es:

$$\overline{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

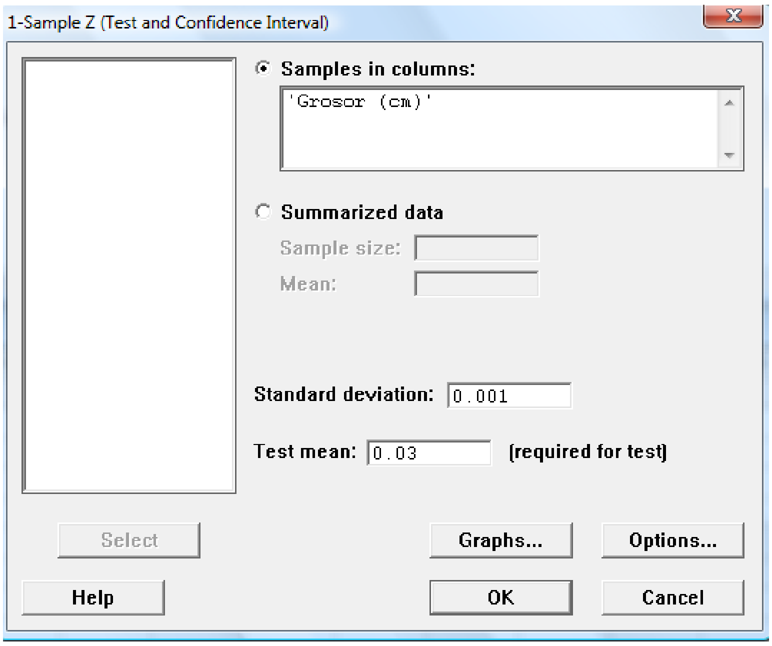
Se procede a utilizar el programa Minitab para realizar los cálculos:

1. En el menú de stat, en basic statistics se hace clik sobre 1-sample Z debido a que se tiene una muestra:



2. Después se despliega una ventana donde se escoge la opción samples in columns debido a que se tienen todos los datos tomados de la muestra. En caso de tener los datos de tamaño de muestra y media, se escogería entonces la opción de sumarized data. En la casilla de samples in columns se pone entonces la columna

que contiene los datos (grosor). Luego en la casilla de standard deviation se pone el valor de la desviación estándar poblacional y en la casilla de test mean, se pone el valor de la media o promedio que estamos probando.



3. Al hacer click en el botón de ok se obtienen los siguientes resultados:

```
Variable       N      Mean     StDev  SE Mean          95% CI              Z
Grosor (cm)   32  0.029553  0.001276  0.000177  (0.029207, 0.029900)   -2.53

Variable          P
Grosor (cm)   0.011
```

Los resultados muestran un valor P de 0.011, este valor es menor a 0.05 que es el nivel de significancia $\longrightarrow 0.011 < 0.05$ por lo tanto se rechaza la hipótesis nula y entonces la media o el grueso promedio de las tabletas producidas no es igual a 0.03 mm.

2. Definiciones

Diseño de Experimentos: La experimentación es una técnica utilizada para encontrar el comportamiento de una variable a partir de diferentes combinaciones de factores o variables de entrada de un proceso, que al cambiar afectan la respuesta. Para entrar a experimentar es necesario pasar primero por el diseño de experimentos, esta técnica busca la manipulación sistemática de las variables de entrada de un proceso para entender el efecto que estas pueden causar en la variable respuesta. Es ampliamente utilizado en las empresas debido a que éste permite visualizar situaciones que pueden suceder a partir de la realización de un proceso. En la industria se utiliza principalmente para buscar el mejoramiento del rendimiento de un proceso, para reducir la variabilidad y permitir que haya un mayor acercamiento a los parámetros de la empresa, para reducir tiempos de procesamiento y reducir costos. Cualquier problema experimental incluye: diseño del experimento y análisis de los datos.

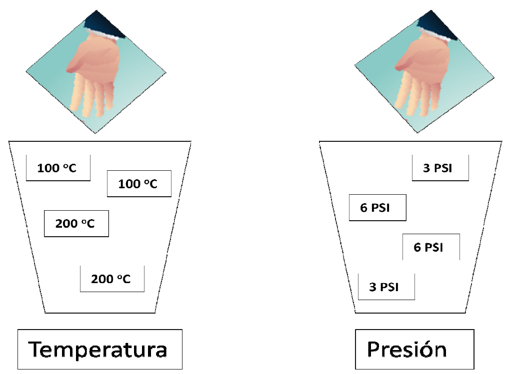
Diseño del Experimento: Se refiere al proceso de planear el experimento que se desea. Es la adquisición de los datos apropiadamente para analizarlos de manera estadística. Cuando se tiene un proceso para análisis, es importante definirlo correctamente y proceder a buscar el mejor diseño de experimentos, de manera que se le pueda sacar el mejor provecho a los datos colectados por medio del análisis estadístico. Las bases de un diseño de experimentos son: replicación, aleatoriedad y bloqueo.

Replicación o Repetición: Es el número de ocasiones que se efectúa una misma condición experimental en la prueba o experimento que se está haciendo. Si por ejemplo se desea probar el efecto que produce el cambio de temperatura (100 ^{o}C y 200 ^{o}C) y el cambio de presión (3 PSI y 6 PSI) en un componente, se tendría una condición experimental al establecer la prueba con 100 ^{o}C de temperatura y 3 PSI de presión; si bajo esta condición experimental se hacen dos pruebas, entonces se están realizando dos replicas o repeticiones. La siguiente figura ilustra la situación:

	Factor 1: Temperatura	
Factor 2: Presión	***Nivel 1 del factor temperatura:*** **100 °C**	***Nivel 2 del factor temperatura:*** **200 °C**
Nivel 1 del factor Presión: **3 PSI**	$\mathbf{X_1}$ **Respuestas bajo la** $\mathbf{X_2}$ **condición 100 °C y 3 PSI**	$\mathbf{Y_1}$ $\mathbf{Y_2}$
Nivel 2 del factor Presión: **6 PSI**	$\mathbf{W_1}$ $\mathbf{W_2}$	$\mathbf{Z_1}$ $\mathbf{Z_2}$

Las letras de color rojo, indican las respuestas a la primera réplica bajo las condiciones allí mostradas. Las letras de color negro, indican las respuestas a la segunda replica bajo las condiciones allí mostradas.

Aleatoriedad: Es el orden en que se ejecutan las condiciones experimentales en el experimento. Bajo la aleatoriedad todos los tratamientos tiene la misma oportunidad de ser seleccionados. Es usada con el propósito de cancelar efectos de variables que no se están controlando (como efectos del ambiente en el que se realiza el experimento $\rightarrow$ humedad). La aleatoriedad cancela el efecto de factores que quizá no conocemos que están allí, incluso estos pueden estar cambiando sus niveles a medida que corremos el experimento. Cuando se conoce la fuente de variabilidad y se puede controlar, se usa una técnica llamada bloqueo.



La figura muestra dos bolsas que representan el factor, dentro de cada una se encuentran 4 papeles que están etiquetados con los niveles para cada factor. Una forma de hacer un procedimiento aleatorio, para el caso del ejemplo mencionado en la definición de replicación, seria tomar de cada bolsa sin mirar, un papelito. Allí se ilustra una mano tomando un papelito de cada bolsa, la misma persona entonces toma un papel de la bolsa de temperatura y luego otro papel de la bolsa de presión y se establece entonces la primera condición experimental. Una vez establecida estos papeles se dejan afuera de las bolsas y se prosigue con la siguiente condición experimental. Una vez no hayan papeles en la bolsa se ha terminado de establecer la primera réplica; si se desea tener más de una réplica, entonces se ingresan los papeles a las bolsas y se repite el procedimiento hasta completar la segunda replica.

Bloqueo: Es una técnica utilizada con el fin de aumentar la precisión del experimento. Se usa cuando se conoce la fuente de variabilidad y se puede controlar. Al controlarla se reduce la variabilidad introducida por esta fuente y se evita que esta influya en la respuesta cuando no se está interesado en el efecto de la misma. Un bloque es una porción del material experimental que debe ser más homogénea que el conjunto completo del material.

Factores: Los factores son las variables de interés para las cuales se quiere estudiar el impacto que tienen las mismas en la respuesta. Las variables temperatura y presión utilizadas para el ejemplo descrito en la definición de replica, son los factores de interés en la experimentación. Estos se puede clasificar como variables controlables: que pueden a su vez clasificarse en variables cualitativas (tipo de material sujeto) y cuantitativas (temperatura y presión). Las variables no controlables afectan el experimento y en ocasiones no son tenidas en cuenta; estas son medibles mas no están bajo el control del experimentador (humedad, la cual se mide mas no se controla). Los factores también pueden ser clasificados de manera fija o aleatoria. Se clasifican de manera fija cuando los niveles del factor (en el caso de factor temperatura antes mencionado, sus niveles son 2: 100 ^{o}C y 200 ^{o}C) son los únicos niveles de interés; es decir que el rango experimental se abarca por completo con esos niveles. Los factores se clasifican de manera aleatoria, cuando los niveles del factor son una muestra que salen de una población mayor y se desea hacer inferencia en la población a partir de los niveles seleccionados.

<u>Niveles:</u> Es el número de alternativas o ajustes para cada factor. La figura mostrada en la definición de replicación, ilustra los niveles para cada factor. En el caso de ese ejemplo en particular se tienen dos niveles para cada uno de los factores.

<u>Variables de salida:</u> Son las variables respuesta del experimento. La respuesta puede ser univariada (una sola salida de interés) o multivariada (múltiples salidas de interés). Estas pueden clasificarse en variables cualitativas y cuantitativas. Se clasifican como cualitativas cuando por ejemplo: se refiere a características, donde la respuesta es un si o un no (cuando se desea saber si un producto es aceptable o no de acuerdo a características observadas, o cuando se tienen en cuenta las características de una persona para tomar una decisión). Se clasifican como cuantitativas cuando se mide algo numérico como la viscosidad, el lead time de los procesos, el tiempo, el peso etc.

<u>Modelos según las variables analizadas</u>

		Variable de entrada o factor (X)	
Variable de salida o respuesta(Y)		**Cuantitativa**	**Cualitativa**
	Cuantitativa	Diagramas de dispersión, Regresión	Análisis de varianza (ANOVA)
	Cualitativa	Regresión Logística	Tablas de contingencia

<u>Pasos a seguir en el diseño de experimentos:</u>

1. Reconocimiento y establecimiento del problema
2. Selección de los factores y niveles de cada uno de estos
3. Selección de la variable respuesta
4. Determinación del diseño experimental que debe llevarse a cabo

5. Realización del experimento para la obtención de los datos de la respuesta
6. Análisis de los datos
7. Conclusiones y recomendaciones
8. Estudio de confirmación

Grados de libertad: Estos se refieren al número de términos independientes en un test particular. Teniendo n como el número de términos, los grados de libertad se calculan mediante n-1.

ANOVA (Análisis de varianza)

Las pruebas de hipótesis son una herramienta útil cuando se trata de comparar dos tratamientos. La experimentación usualmente requiere comparación de más de dos tratamientos simultáneamente, es allí donde se introduce Anova (teniendo en cuenta que es un procedimiento para análisis de factores cualitativos).

El análisis de varianza se deriva de la partición de la variabilidad total en las partes que la componen. ANOVA establece que la variabilidad total en los datos, medida por la suma de cuadrados total, puede ser dividida en una suma de cuadrados de la diferencia entre los promedios de los tratamientos y el gran promedio total más una suma de cuadrados de la diferencia de las observaciones entre tratamientos del promedio del tratamiento. Anova, nos da la herramienta para distinguir si un factor afecta la respuesta en promedio.

Presunciones de Anova:

1. Los errores o residuales son independientes y distribuidos de manera normal o gaussiana, con promedio equivalente a 0 y varianza constante. Si su promedio no fuese 0, el modelo estaría subestimando o sobreestimando.
2. Anova presume que todas las varianzas de los niveles del factor son iguales y toma un solo cálculo de varianza llamado S_{pooled} o varianza conjunta.

Anova mira los promedios de cada nivel contra el promedio general y lo llama entre tratamientos. Anova queda con dos estimados de varianza, dentro y entre los niveles; con estos se saca un cociente, si las 2 varianzas se parecen, es decir, el cociente es aproximadamente 1, el factor no tiene ningún impacto en la respuesta, pero si este cociente resulta ser grande, entonces el factor tiene mucho impacto en la respuesta.

Para ilustrar se presenta a continuación un ejemplo teniendo en cuenta un solo factor aleatorio:

	Observaciones (n replicas)						
Niveles del factor	1	2	…	n	Totales $Y_{i.}$	Promedios $\bar{Y}_{i.}$	
1	Y_{11}	Y_{21}	…	Y_{n1}	$Y_{11}+ Y_{21}+\dots Y_{n1}$	$\bar{Y}_{1.}$	
2	Y_{12}	Y_{22}	…	Y_{n2}	$Y_{12}+ Y_{22}+\dots Y_{n2}$	$\bar{Y}_{2.}$	
. .	. .	. .	…	. .	. .	…	
a	Y_{1a}	Y_{2a}	…	Y_{na}	$Y_{1a}+ Y_{2a}+\dots Y_{an}$	$\bar{Y}_{a.}$	
Totales					$Y_{..}$	$\bar{Y}_{..}$	

A partir de la anterior tabla, se presenta la forma manual de hacer Anova con el fin de entender el concepto que maneja el análisis de varianza. Inicialmente se debe calcular la suma de cuadrados de los tratamientos:

$$SS_{Tratamientos} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a} Y_{i.}^{2}\right) - \frac{Y_{..}^{2}}{N} \longrightarrow$$

Fuente de variación entre tratamientos

Donde:

n = Numero de tratamientos por cada nivel

N = Numero de tratamientos en total

i = 1, 2, 3… a

Luego se debe calcular la suma de cuadrados total:

$$SS_{Total} = (\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^2) - \frac{Y_{..}^2}{N}$$

Donde:

N = Numero de tratamientos en total

i = 1, 2, 3… a

j = 1, 2, 3…n

Para estimar la suma de cuadrados de los errores se hace la diferencia de la suma de cuadrados total y la suma de cuadrados de los tratamientos:

$$SS_E = SS_{Total} - SS_{Tratamientos} \longrightarrow$$

Fuente de variación dentro de los tratamientos

La tabla de Anova quedaría así:

ANOVA				
Fuente de variación	**Suma de cuadrados (SS)**	**Grados de libertad**	**Promedio de los cuadrados (MS)**	**Estadístico de prueba Fo**
Tratamientos	SS tratamientos	a-1	$\frac{SS_{tratamientos}}{a-1}$	$\frac{MS_{tratamientos}}{MS_{error}}$
Error	SS error	N-a	$\frac{SS_{error}}{N-a}$	
Total	SS total	N-1		

3. Experimento de un solo factor aleatorio.

Este tipo de experimento es el más sencillo y consiste en analizar un solo factor evaluado en diferentes niveles, de manera que se compara las medias de la respuesta en cada uno de esos niveles y se establece si hay diferencia entre ellas.

El modelo correspondiente a este experimento esta dado por la ecuación IV.

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \qquad \text{I}$$

Donde μ es un parámetro común para todos los tratamientos llamado la media general, τ representa el efecto del tratamiento i y ε_{ij} corresponde al error que incorpora todas las fuentes de variabilidad en el experimento.

Las hipótesis evaluadas son:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \ldots\tau_a$$

$$H_1 : \tau_1 \neq \tau_2 \neq \ldots\tau_a$$

Lo que se desea investigar es si existe diferencia o no entre los niveles del factor en consideración.

Ejemplo 1 (Tomado del libro Design and analysis of Experiments, de Douglas C. Montgomery, 6ta edición. Página 70)

En muchos procesos de manufactura de circuitos integrados, los "wafers" son revestidos con una capa de material como dióxido de silicona o un metal. Luego, el material que no se necesita es removido haciendo los grabados necesarios para crear los patrones de los circuitos, interconexiones eléctricas y áreas donde se hacen los depósitos de metal. Un proceso de grabado tipo plasma es ampliamente usado para esta operación. La energía para el proceso es suplida por un generador de radio frecuencia RF que hace que el plasma sea generado en el intervalo entre electrodos. El ingeniero del proceso está interesado en determinar si diferentes niveles de poder de la RF afecta la tasa de grabado. Debido a que se tiene un solo factor, el ingeniero ha decidido hacer un experimento de un solo factor aleatorio con 5 replicas. Al correr el experimento se obtuvo las siguientes respuestas:

Poder RF (W)	Tasa de grabado observada (replicas)					Totales	Promedios
	1	2	3	4	5	$Y_{i.}$	$\bar{Y}_{i.}$
160	575	542	530	539	570	2756	551.2
180	565	593	590	579	610	2937	587.4
200	600	651	610	637	629	3127	625.4
220	725	700	715	685	710	3535	707.0
						$Y_{..}$ = 12,355	$\bar{Y}_{..} = 617.75$

Ahora, las hipótesis que el investigador desea probar son:

Ho: Las medias de los niveles son iguales $\mu_{160} = \mu_{180} = \mu_{200} = \mu_{220}$

H_1: Algunas medias son diferentes

Teniendo claras las hipótesis y habiendo corrido el experimento, se procede a realizar los cálculos matemáticos que permitan llegar al estadístico de prueba Fo para tomar una decisión.

$$SS_{Total} = (\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^2) - \frac{Y_{..}^2}{N} = (575^2 + 542^2 + \ldots + 710^2) - \frac{12{,}355}{20} = 72{,}209.75$$

$$SS_{Trat} = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a} Y_{i.}^2) - \frac{Y_{..}^2}{N} = \frac{1}{5}[2756^2 + \ldots + 3535^2] - \frac{12{,}355}{20} = 66{,}870.55$$

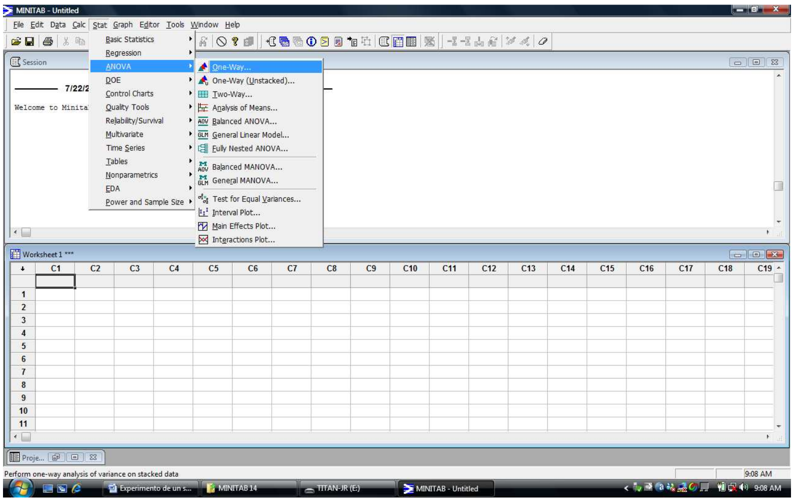
$$SS_E = SS_{Total} - SS_{Tratamientos} = 72{,}209.75 - 66{,}870.55 = 5339.20$$

ANOVA				
Fuente de variación	**Suma de cuadrados (SS)**	**Grados de libertad**	**Promedio de los cuadrados (MS)**	**Estadístico de prueba Fo**
Poder RF	66,870.55	3	$\frac{66{,}870.55}{3} = 22{,}290.18$	$\frac{22{,}290.18}{333.70} = 66.80$
Error	5339.20	16	$\frac{5339.20}{16} = 333.70$	
Total	72,209.75	19		

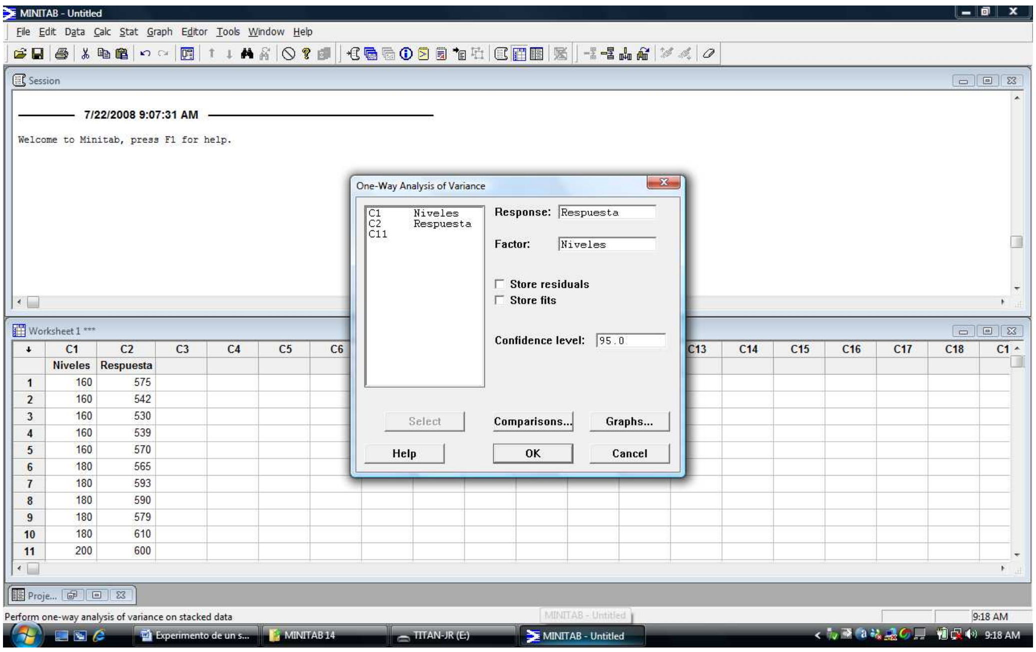
El experimentador obtiene un valor de Fo = 66.80. Tomando un nivel de significancia de 0.05, teniendo 3 grados de libertad del factor y 16 del error, se procede a buscar en la tabla de la distribución F y se obtiene un valor de 3.24. Como $66.80 > 3.24$ entonces se concluye que las medias de los niveles del factor difieren y por tanto se procede a rechazar Ho.

Es importante notar que el procedimiento descrito anteriormente es hecho a mano. Para esto existen programas como Minitab quienes realizan los cálculos a partir de los datos ingresados. A continuación se ilustra el procedimiento en Minitab:

1. En el menú de stat se busca la opción anova, allí se hace doble click en la opción one way anova como muestra la figura



2. Aparece entonces una ventana que permite ingresar las columnas de valores para el análisis. En la primera casilla que dice response, se ingresa la columna que contiene los valores de la respuesta, en la siguiente casilla de factor, se ingresa la columna que tiene los niveles del factor, se dejo una confianza del 95% que equivale al nivel de significancia de 0.05 utilizado en los cálculos manuales:



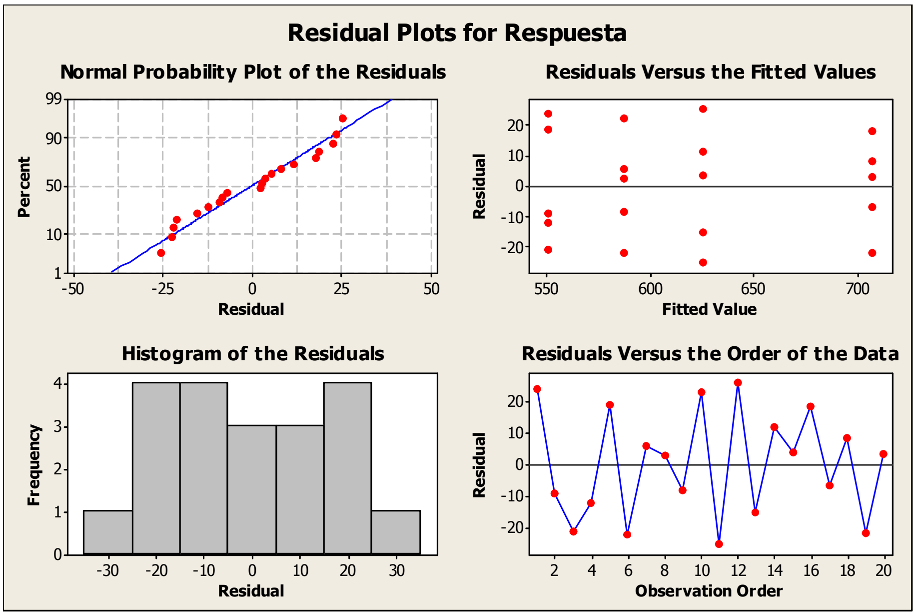
3. Al dar clik en OK se obtiene la siguiente respuesta:

One-way ANOVA: Respuesta versus Niveles

```
Source    DF     SS     MS      F      P
Niveles    3  66871  22290  66.80  0.000
Error     16   5339    334
Total     19  72210

S = 18.27   R-Sq = 92.61%   R-Sq(adj) = 91.22%
```

Se obtienen los mismos valores que se obtuvieron con los cálculos manuales. En este caso se ve que el P-value es de 0, esto implica un valor menor al del nivel de significancia (0.005). al ser 0 < 0.005 se rechaza Ho y el investigador puede concluir entonces que los niveles del poder afectan la tasa de grabado.

4. Al dar clik en OK se obtiene también una grafica con 4 métodos de análisis graficos para los residuales, esto con el fin de cotejar la idoneidad del modelo:



- Normal probability plot of the residuals (trazo de probabilidad normal): Este grafico muestra que los residuales se encuentran al rededor de la línea del medio, lo cual quiere decir que no hay ninguna desviación significativa de la presunción de normalidad para los residuales.

- Residuals versus the fitted values (trazo de residuales contra los valores estimados): este grafico muestra que no hay un patrón definido.
- Histogram of the residuals (histograma de los residuales): la forma del mismo muestra un comportamiento aproximadamente normal o gaussiano.
- Residuals versus the order of the data (trazo de residuales vs orden de la experimentación): Este grafico muestra que los datos no siguen ningún patrón.

Ejemplo 2

La compañía Mush, productora de setas, ha elaborado un proceso de deshidratación de las mismas. Para el proceso se estableció una caja de cartón equipada con una entrada de aire, una chimenea, una parrilla para poner las setas a deshidratar y un foco debajo de la misma, el cual provee el calor necesario para deshidratar las setas. El ingeniero encargado del proceso sabe que 150 gramos de setas tardan de 9 a 18 horas en deshidratarse pero no sabe el tiempo exacto. Se sabe también que las setas deben llegar a reducir su peso en un 87% aproximadamente para considerarse deshidratadas. Debido a esto se estableció un experimento tomando un solo factor en consideración (tiempo). El experimentador determino 4 niveles de tiempo entre 9 y 18 horas con intervalos de 3 horas entre cada nivel.

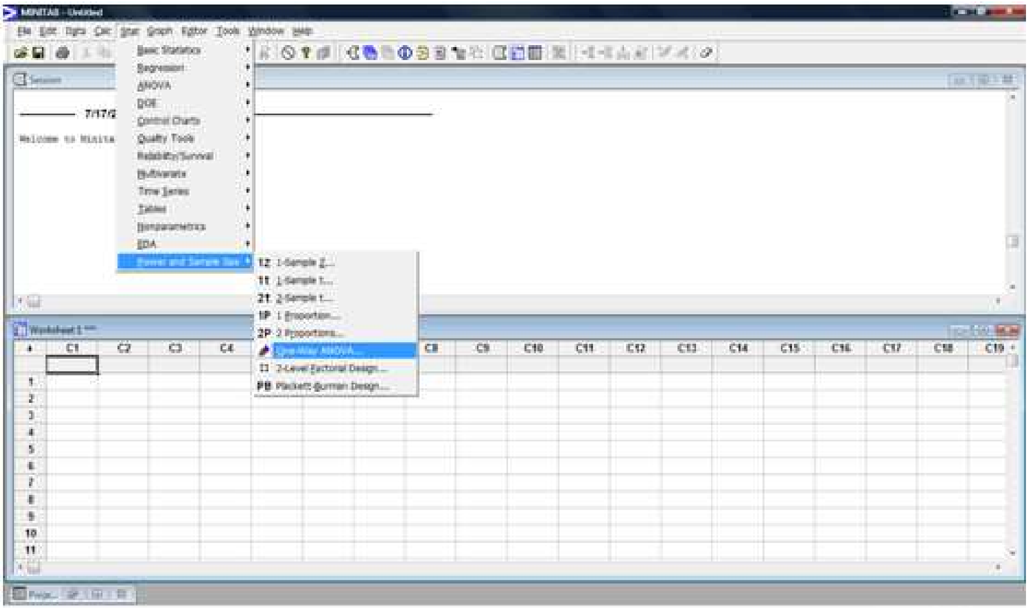
Lo anterior conlleva entonces a la siguiente configuración:

Factor: Tiempo			
Nivel 1: 9 horas	Nivel 2: 12 horas	Nivel 3: 15 horas	Nivel 4: 18 horas
X	X	X	X

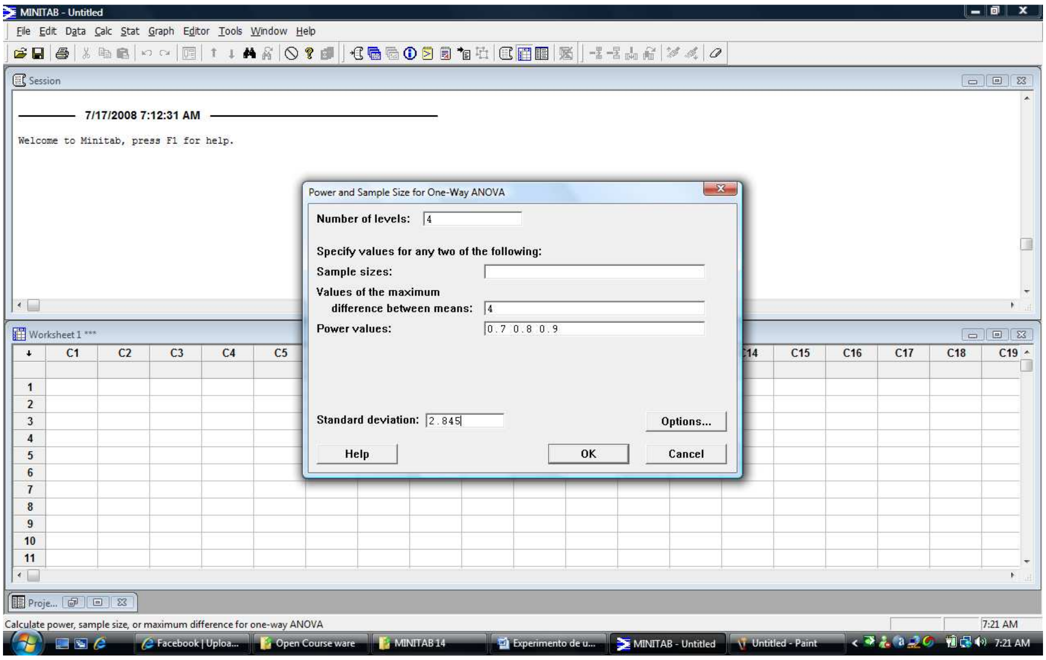
El experimentador sabe que debe realizar replicas de su experimento; para esto el realizó una prueba de poder y tamaño de muestra (power and sample size) en el programa Minitab.

El poder es la probabilidad de que la prueba rechace la hipótesis nula (en este caso es que no exista diferencia entre las medias de los pesos para los niveles de la variable tiempo o que no haya diferencia entre el efecto de los niveles de la variable) cuando la misma es falsa; se denomina como 1-β, siendo β la probabilidad de aceptar algo que debió ser rechazado. Se presumieron 3 valores para el poder (0.7, 0.8 y 0.9) para evaluar la cantidad de replicas de acuerdo a cada uno de ellos. En cuanto a la diferencia entre las medias de los factores, el experimentador hizo una presunción de 4 gramos de manera que se pueda detectar la diferencia entre los efectos de los niveles cuando las medias varíen en más de 4 gramos la una de la otra. El valor de la desviación estándar de los pesos era previamente conocido (2.845 gramos). Los valores del poder, la diferencia entre medias, la desviación estándar y un nivel de significancia de 0.05 fueron ingresados a Minitab de la siguiente manera:

1. En Minitab, en el menú de stat se encuentra la opción de power and sample size y allí la opción de one way anova como muestra la próxima figura:



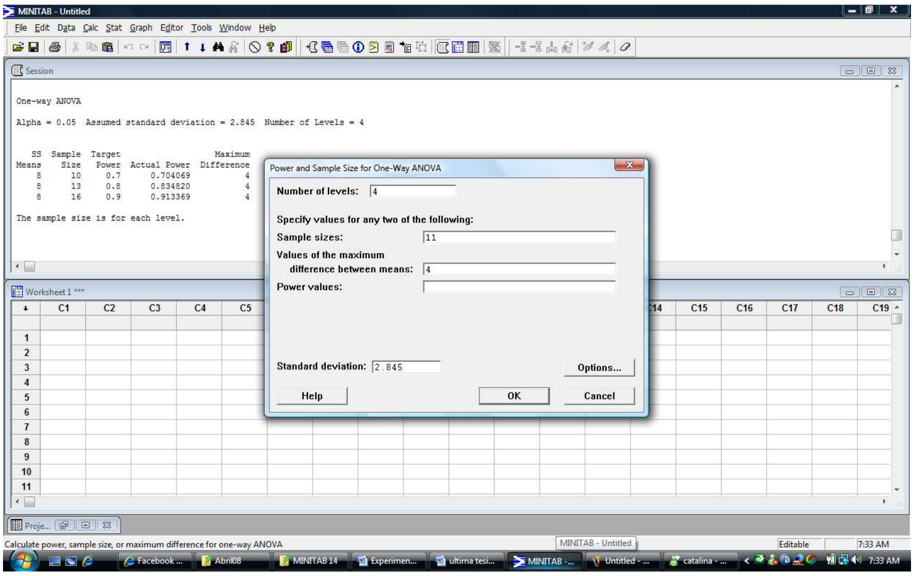
2. Al abrir la opción one way anova, se encuentra entonces la pantalla donde se ingresan los datos del experimento, es decir, el numero de niveles del factor, el valor de la diferencia máxima que se desea entre las medias de los pesos para cada uno de los niveles, los valores del poder y la desviación estándar de los pesos. La siguiente figura ilustra el procedimiento:



3. Al dar click en el botón de OK se obtiene el siguiente resultado:

```
Power and Sample Size

One-way ANOVA
Alpha = 0.05  Assumed standard deviation = 2.845  Number of Levels = 4
   SS    Sample  Target                   Maximum
Means     Size    Power  Actual Power  Difference
    8       10      0.7      0.704069           4
    8       13      0.8      0.834820           4
    8       16      0.9      0.913369           4
The sample size is for each level.
```

El experimentador entonces concluye que para obtener un poder de 0.704069 debe realizar 10 replicas del experimento, para un poder de 0.834820 debe hacer 13 replicas y para un poder de 0.913369 debe hacer 16 replicas. Debido a que el mínimo de replicas es de 10, el experimentador decide entonces buscar el poder que se conseguiría al realizar 11 replicas del experimento. Este procedimiento se hace mediante la misma herramienta de Minitab pero dejando en blanco la casilla de power y poniendo el número 11 en sample size. A continuación se ilustra el procedimiento y la respuesta obtenida:

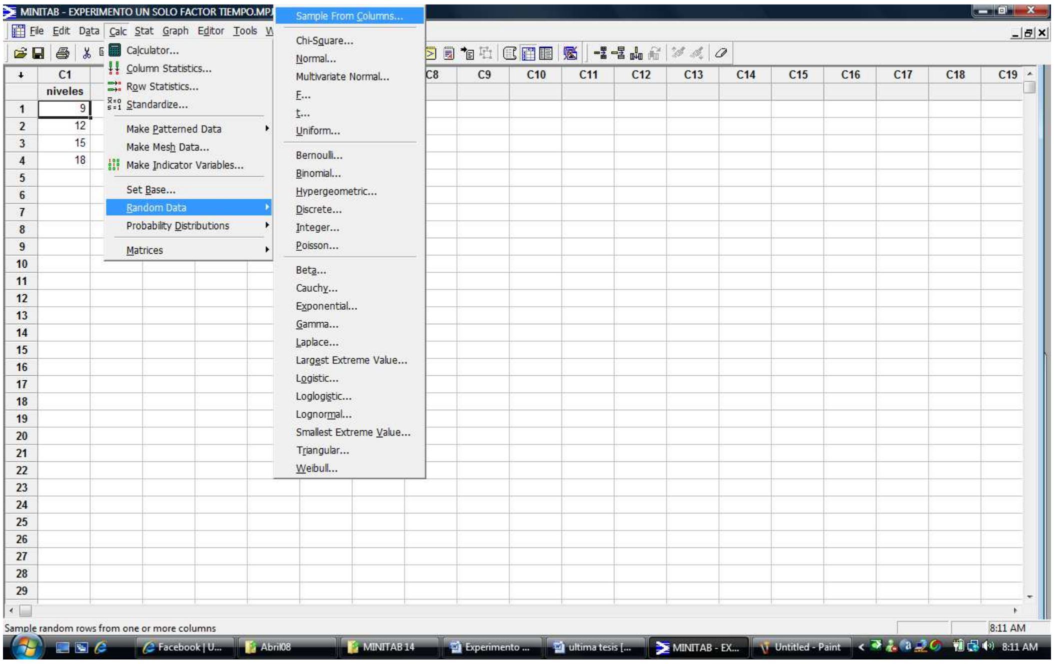



```
Power and Sample Size

One-way ANOVA

Alpha = 0.05  Assumed standard deviation = 2.845  Number of Levels = 4


   SS  Sample              Maximum
Means    Size     Power  Difference
    8      11  0.754440           4


The sample size is for each level.
```

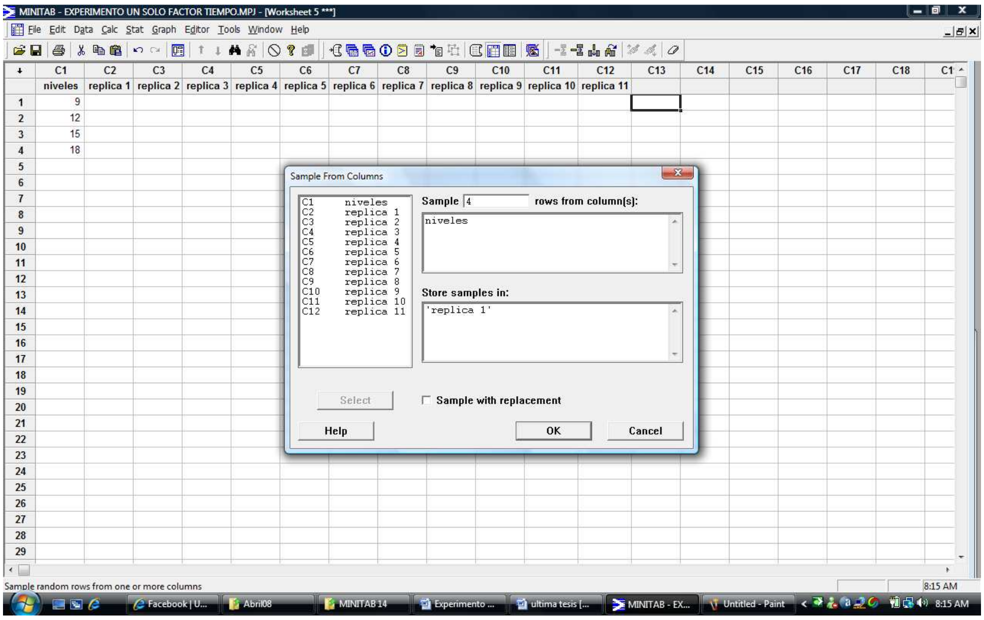
Según el anterior resultado, al realizar 11 replicas se obtiene un poder de 0.7544 que el experimentador considera razonable para los resultados que desea obtener. Por lo anterior el número de replicas que se deben realizar en el experimento de un solo factor aleatorio es de 11.

Después el experimentador hace la aleatoriedad con la que va a realizar la experimentación para cada replica, es decir, en el programa Minitab se ingresan los valores de los niveles (9,12, 15 y 18 horas) y se hace un procedimiento para obtener el orden en que se van a hacer las corridas para cada replica. La siguiente figura ilustra el procedimiento en el programa Minitab:

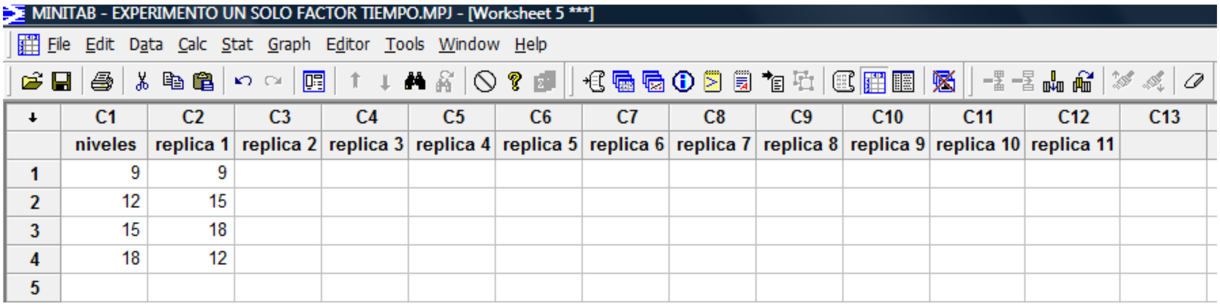
1. En el menú de calc, en la opción Random data, se despliega otro menú donde se escoge la opción sample from column:



2. Al hacer click en sample from column se despliega una ventana donde se ingresa el numero de filas que contienen los datos a organizar, luego una casilla donde se ingresa la columna de la cual se hace la aleatoriedad, esto haciendo doble click en los nombres de las columnas que se despliegan en la casilla de la izquierda, finalmente en la última casilla se ingresa el nombre de la columna donde se desea que se almacene el resultado (la organización aleatoria de la réplica). La siguiente figura ilustra el procedimiento:



3. Al hacer click en OK se despliega el siguiente resultado:



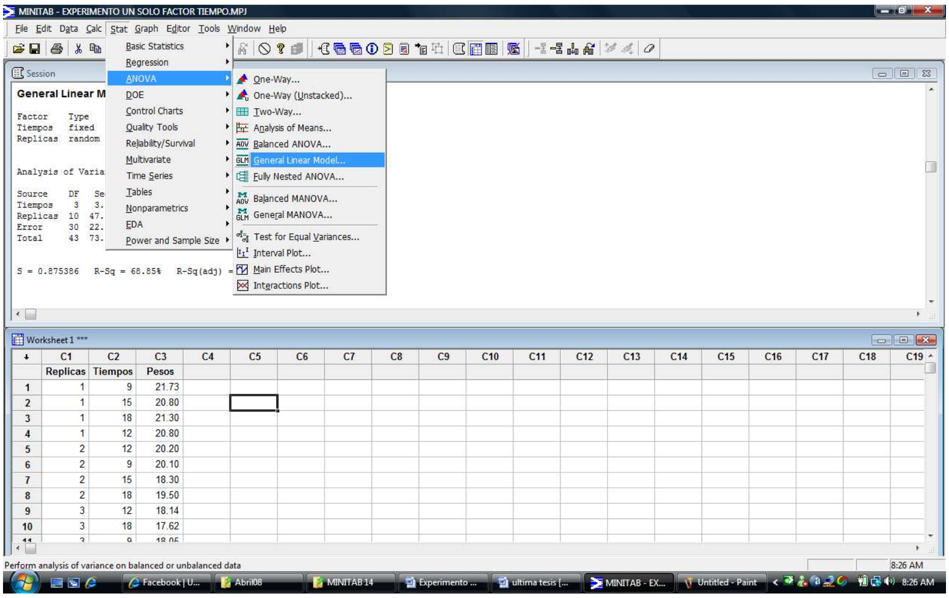
Entonces el experimentador debe correr la primera réplica poniendo las setas en la caja por 9 horas inicialmente, luego debe sacarlas, pesarlas y poner un segundo lote de setas en la caja por 15 horas y así hasta completar la réplica. Para la aleatoriedad de las demás replicas, se repite el procedimiento anteriormente mencionado

Los resultados de los pesos en gramos para las 11 replicas son:

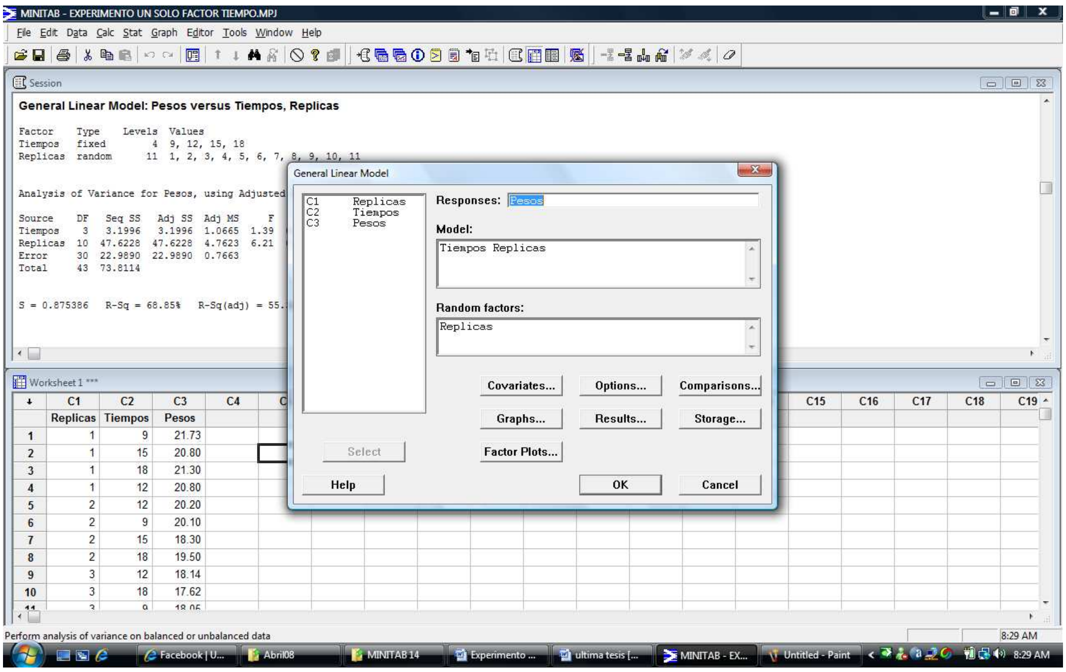
	Factor: Tiempo			
Replica	Nivel 1: 9 horas	Nivel 2: 12 horas	Nivel 3: 15 horas	Nivel 4: 18 horas
1	21.73	20.80	20.80	21.30
2	20.10	20.20	18.30	19.50
3	18.05	18.14	18.40	17.62
4	20.05	19.30	18.85	19.30
5	19.01	19.42	20.27	18.75
6	21.64	21.81	20.06	21.88
7	23.21	20.22	19.04	22.02
8	20.34	18.20	18.74	18.85
9	18.50	18.02	18.30	19.30
10	19.34	20.05	19.53	18.70
11	19.39	18.90	21.43	20.54

El experimentador ingreso los datos a Minitab y realizo el análisis de los mismos de la siguiente manera:

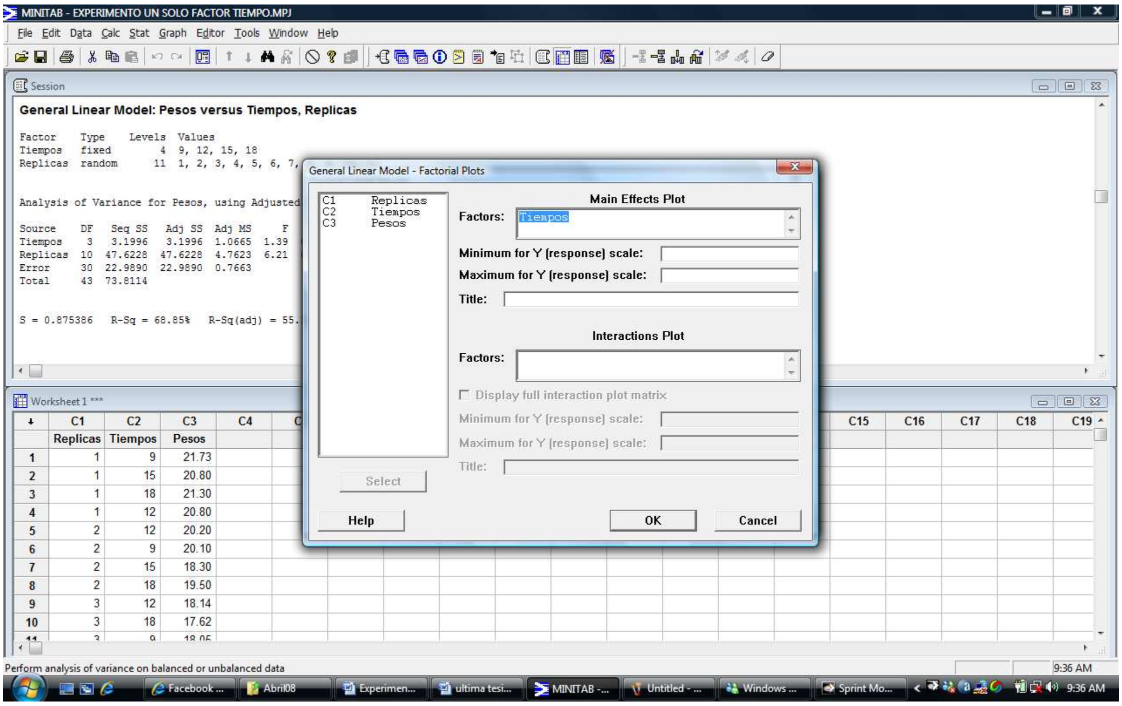
1. En el menú de stat, se despliegan diferentes opciones, debido a que se desea realizar un análisis de varianza, se despliega entonces el menú de ANOVA, donde se escoge la opción de General linear model como muestra la figura:



2. Al dar click en General linear model se obtiene una ventana donde se ingresa en la primera casilla la columna de respuestas denominada como pesos, en la casilla de Model se ingresa el modelo, en este caso el factor tiempo y las replicas, siendo el factor tiempo un factor fijo y las replicas un factor aleatorio. En la última casilla (random factors) se especifica que el factor replica es aleatorio



3. La ventana muestra 7 botones que permiten especificar o adquirir información adicional en el análisis. Para este caso, se oprime el botón factor plots y se obtiene la siguiente ventana:



4. La anterior opción permite realiza un grafico de los efectos principales de los niveles del factor. En la casilla Factors se ingresa entonces el factor tiempo, se oprime OK y regresa a la ventana principal donde se oprime OK de nuevo y se obtiene el siguiente resultado:

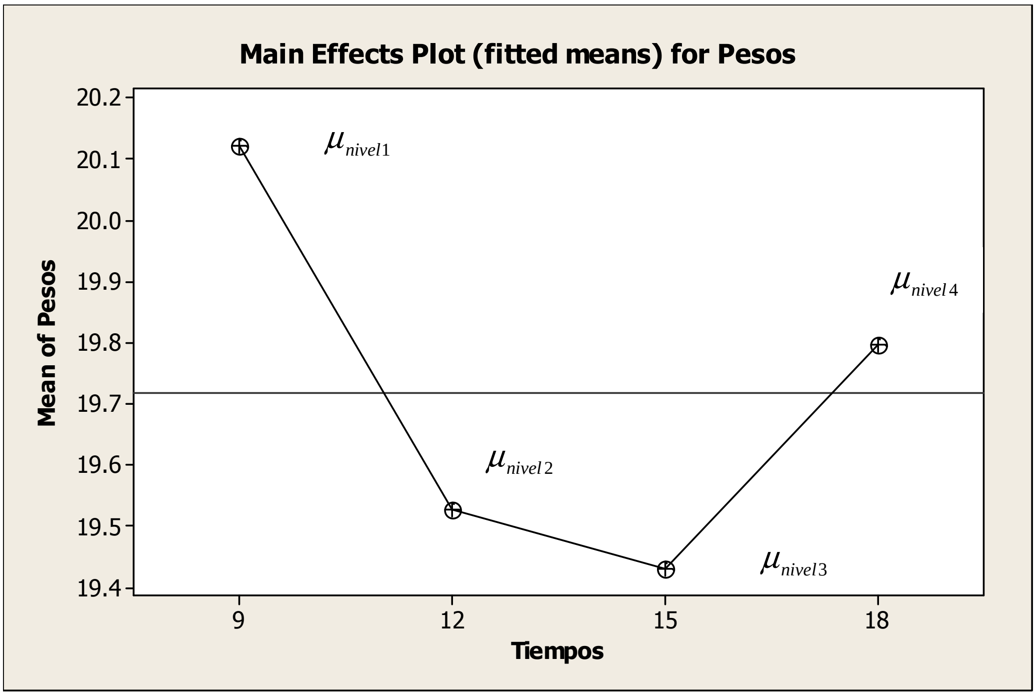
```
General Linear Model: Pesos versus Tiempos, Replicas

Factor    Type    Levels  Values
Tiempos   fixed        4  9, 12, 15, 18
Replicas  random      11  1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11


Analysis of Variance for Pesos, using Adjusted SS for Tests

Source    DF   Seq SS   Adj SS  Adj MS     F      P
Tiempos    3   3.1996   3.1996  1.0665  1.39  0.264
Replicas  10  47.6228  47.6228  4.7623  6.21  0.000
Error     30  22.9890  22.9890  0.7663
Total     43  73.8114


S = 0.875386   R-Sq = 68.85%   R-Sq(adj) = 55.36%
```

El valor P es mayor al valor de alfa de 0.05 por lo tanto no se puede rechazar Ho y se determina que no hay diferencia entre los niveles del factor.

```
Unusual Observations for Pesos

Obs    Pesos      Fit  SE Fit  Residual  St Resid
 25  19.0400  20.8327  0.4938   -1.7927     -2.48 R
 26  23.2100  21.5273  0.4938    1.6827      2.33 R
 44  21.4300  19.7752  0.4938    1.6548      2.29 R

R denotes an observation with a large standardized residual.
```

Residual Plots for Pesos

Main Effects Plot (fitted means) for Pesos



El experimentador deduce que no hay diferencia entre los niveles del factor tiempo debido a su valor P. Al observar la grafica se encuentra que la diferencia entre las medias de los niveles no sobrepasan los 4 gramos de diferencia entre las medias que el experimentador quería detectar, por lo tanto, el tiempo que debe durar el proceso de deshidratación es de 9 horas.

1. Bloque Completamente Aleatorio

En cualquier experimento puede existir alguna fuente de variación que puede afectar los resultados. Muchas veces esta fuente de variación es desconocida e incontrolable. La *aleatoriedad* es una técnica de diseño que se utiliza con el propósito de cancelar efectos de variables que no estamos controlando ya sea porque no podamos controlarlas o porque no se conoce. Cuando se habla de aleatoriedad significa que se conduce al azar y no se le impone una estructura. Cuando esa fuente de variación se conoce y se controla (ya sea por aleatoriedad) se utiliza una técnica llamada bloque para eliminar sistemáticamente el efecto de la fuente de variación en las comparaciones estadísticas entre tratamientos.

<u>Descripción:</u>

Un diseño de experimento es completamente aleatorio cuando hay:

- Un factor de interés.
- Una fuente bloqueada.

Si hay alguna fuente de variación que está incidiendo en el experimento y que no está en el modelo, el efecto de esta fuente de variación se va a reflejar en el error si la variable que representa dicha variación no es bloqueada. La aleatoriedad ocurre dentro del bloque.

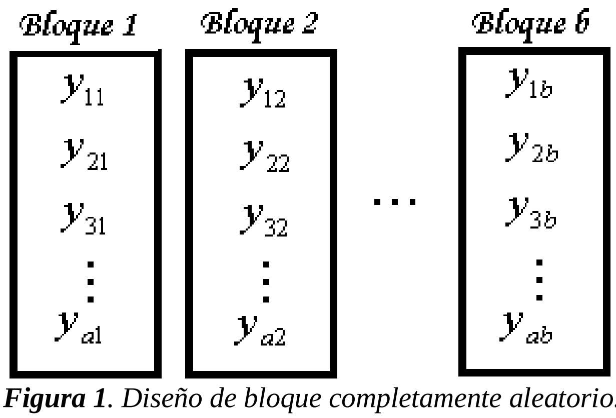


***Figura 1**. Diseño de bloque completamente aleatorio.*

Modelo Estadístico:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \begin{cases} i = 1,2,\ldots,a \\ j = 1,2,\ldots,b \end{cases},$$

donde:

y_{ij} → observación *j* del tratamiento *i*

μ → promedio general

τ_i → efecto del tratamiento *i*

ε_{ij} → error o residual de la observación *j* en el tratamiento *i*

β_j → efecto del bloque *j*

En los experimentos que envuelven diseños de bloques completamente aleatorio, se interesa probar la igualdad de los promedios de los tratamientos. Por lo tanto, las hipótesis de interés son

$$\mathrm{H_0} : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_a$$
$$\mathrm{H_1} : \mathrm{at \cdot least \cdot one} \cdot \mu_i \neq \mu_j$$

Debido a que el promedio del tratamiento *i* es $\mu_i = \mu + \tau_i$, una forma equivalente de escribir la hipótesis es en términos de los efectos en los tratamientos, entonces

$$\mathrm{H_0} : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = 0$$
$$\mathrm{H_1} : \tau_i \neq 0 \cdot \mathrm{at \cdot least \cdot one} \cdot \mathrm{i}$$

Análisis de Varianza* (ANOVA) *para este modelo:

El análisis de varianza se deriva de la partición de la variabilidad total en las partes que la componen. ANOVA establece que la variabilidad total en la data, medida por la suma de cuadrados total, puede ser dividida en una suma de cuadrados de la diferencia entre los promedios de los tratamientos y el gran promedio total más una suma de cuadrados de la diferencia de las observaciones entre tratamientos del promedio del tratamiento. Para aclarar la definición primero definiremos las variables que componen las ecuaciones de ANOVA.

Tenemos que $y_{i\bullet}$ es el total de todas las observaciones tomadas bajo el tratamiento *i*, $y_{\bullet j}$ es el total de todas las observaciones tomadas en el bloque *j*, $y_{\bullet\bullet}$ es el gran total de todas las observaciones y $N = ab$ es el número total de observaciones. Expresadas en forma matemática tenemos

$$y_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{b} y_{ij} \qquad i = 1,2,\ldots,a$$
$$y_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{a} y_{ij} \qquad j = 1,2,\ldots,b$$
$$y_{\bullet\bullet} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij} = \sum_{i=1}^{a} y_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{b} y_{\bullet j}$$

De igual forma, $\overline{y}_{i\bullet}$ es el promedio de las observaciones tomadas en el tratamiento *i*, $\overline{y}_{\bullet j}$ es el promedio de las observaciones en el bloque *j* y $\overline{y}_{\bullet\bullet}$ es el promedio del gran total de todas las observaciones. Esto es,

$$\overline{y}_{i\bullet} = y_{i\bullet}/b \qquad \overline{y}_{\bullet j} = y_{\bullet j}/a \qquad \overline{y}_{\bullet\bullet} = y_{\bullet\bullet}/N$$

La suma de cuadrados total puede ser expresada como

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(y_{ij} - \overline{y}_{\bullet\bullet}\right)^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left[\left(\overline{y}_{i\bullet} - \overline{y}_{\bullet\bullet}\right) + \left(\overline{y}_{\bullet j} - \overline{y}_{\bullet\bullet}\right) + \left(y_{ij} - \overline{y}_{i\bullet} - \overline{y}_{\bullet j} + \overline{y}_{\bullet\bullet}\right)\right]^2$$

Expandiendo el lado derecho de la ecuación y haciendo algebra simple pero tediosa obtenemos la ecuación que representa una partición del total de la suma de cuadrados pero que es una de las ecuaciones fundamentales en ANOVA para el diseño de bloque completamente aleatorio. La ecuación es

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(y_{ij} - \overline{y}_{\bullet\bullet}\right)^2 = b\sum_{i=1}^{a}\left(\overline{y}_{i\bullet} - \overline{y}_{\bullet\bullet}\right)^2 + a\sum_{j=1}^{b}\left(\overline{y}_{\bullet j} - \overline{y}_{\bullet\bullet}\right)^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(y_{ij} - \overline{y}_{\bullet j} - \overline{y}_{i\bullet} + \overline{y}_{\bullet\bullet}\right)^2$$

Esta suma expresada de forma simbólica seria de la siguiente manera

$$SS_T = SS_{Treatments} + SS_{Blocks} + SS_E$$

Otro parámetro a considerar es el grado de libertad de cada una de las partes de la suma de cuadrados. Los grados de libertad son el número de elementos independientes en cada una de las sumas de cuadrados. Este parámetro nos ayuda a determinar el número de datos que necesitamos para hacer un estimado.

Debido a que hay N observaciones, SS_T tiene N-1 grados de libertad. Hay a tratamientos y b bloques, por lo tanto, $SS_{\text{Treatments}}$ tiene a-1 grados de libertad y SS_{Blocks} tiene b-1 grados de libertad. La suma de cuadrados del error SS_{E} tiene (a-1)(b-1) grados de libertad debido a la diferencia entre la suma de cuadrados del tratamiento y los bloques.

Ahora podemos obtener los promedios de los cuadrados dividiendo la suma de los cuadrados por sus grados de libertad.

Para probar la igualdad de los promedios de los tratamientos usamos la prueba estadística F

$$F_o = \frac{MS_{Treatments}}{MS_E}$$

La cual está distribuida como $F_{a-1,(a-1)(b-1)}$ si la hipótesis nula es cierta. La región crítica es la cola superior de la distribución F, por eso rechazamos la hipótesis nula Ho si $F_0 > F_{\alpha,a-1,(a-1)(b-1)}$. De forma alterna podemos utilizar el P-value para la toma de decisiones. El P-value es la probabilidad de que la prueba estadística va a tomar un valor que es al menos tan extrema como el valor observado de la estadística cuando la hipótesis nula es cierta. El P-value se define como el nivel de significancia más pequeño que llevaría al rechazo de la hipótesis nula Ho.

El error puede estar inflado por lo que es el error de verdad mas todo aquello que no contabilicé, por lo tanto, debo bloquear las variables que son. Un procedimiento aproximado que resulta razonable para investigar el efecto de la variable bloqueada es examinar el radio de MSBlocks entre MSE. Si este radio es grande, implica que el factor bloque tiene un efecto grande y que la reducción de ruido obtenida por el bloque probablemente es útil en mejorar la precisión en la comparación de los promedios de los tratamientos.

El procedimiento para el análisis de varianza se resume en una tabla de ANOVA como la que se presenta a continuación.

Ecuaciones de ANOVA

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Promedio Cuadrado	F_0
Tratamientos	$SS_{Treatments}$	a-1	$\frac{SS_{Treatments}}{a-1}$	$\frac{MS_{Treatments}}{MS_E}$
Bloques	SS_{Blocks}	b-1	$\frac{SS_{Blocks}}{b-1}$	
Error	SS_E	(a-1)(b-1)	$\frac{SS_E}{(a-1)(b-1)}$	
Total	SS_T	N-1		

Estos valores se pueden calcular en una hoja de cálculo de Excel pero también se pueden obtener de forma manual calculando las formulas expresadas en términos de los tratamientos y bloques totales. Estas formulas son

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}^2 - \frac{y_{\bullet\bullet}^2}{N}$$

$$SS_{Treatments} = \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{a} y_{i\bullet}^2 - \frac{y_{\bullet\bullet}^2}{N}$$

$$SS_{Blocks} = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{b} y_{\bullet j}^2 - \frac{y_{\bullet\bullet}^2}{N}$$

Y el error se obtiene restando como sigue

$$SS_E = SS_T - SS_{Treatments} - SS_{Blocks}$$

Ejemplo 1

Un fabricante de dispositivo médico produce injertos vasculares (venas artificiales). Éstos injertos son producidos insertando a presión resina de politetrafluoetileno combinado con un lubricante dentro de los tubos. Con frecuencia, algunos de los tubos en un funcionamiento de producción contienen salientes pequeñas y duras en la superficie externa. Estos defectos se conocen como " flicks." El defecto es causa para el rechazo de la unidad.

El desarrollador del producto responsable de los injertos vasculares sospecha que la presión de insertar la resina afecta a la ocurrencia del " flicks" y, por lo tanto, se prepone conducir un experimento para investigar esta hipótesis. Sin embargo, la resina es fabricada por un suplidor externo y es entregada al fabricante del dispositivo médico en lotes. El ingeniero también sospecha que puede haber una variación significativa de lote-a-lote, porque mientras que el material debe ser constante con respecto a parámetros tales como peso molecular, tamaño de partícula promedio, retención, y cociente de la altura de pico, esta variación no es probablemente debido a la variación de la fabricación en el suplidor de la resina y a la variación natural en el material. Sin embargo, el desarrollador del producto decide investigar el efecto de los cuatro niveles diferentes de la presión de inserción en los “flicks” usando un diseño completamente aleatorio considerando los lotes de la resina como bloques. La variable respuesta es el rendimiento o el porcentaje de tubos en la producción que no contiene “flicks".

A continuación se presenta la tabla que contiene los datos con respecto a este experimento.

Datos del ejemplo numérico.

Presión de Inserción (PSI)	Lote de Resina (Bloque)						*Total de los Tratamientos*
	1	2	3	4	5	6	
8500	90.3	89.2	98.2	93.9	87.4	97.9	*556.9*
8700	92.5	89.5	90.6	94.7	87.0	95.8	*550.1*
8900	85.5	90.8	89.6	86.2	88.0	93.4	*533.5*
9100	82.5	89.5	85.6	87.4	78.9	90.7	*514.6*
Totales de los Bloques	*350.8*	*359*	*364*	*362.2*	*341.3*	*377.8*	*2155.1*

$y_{i\bullet}$ $y_{\bullet\bullet}$ $y_{\bullet j}$

Ejemplo calculando $y_{i\bullet}$:

Para la presión 8500 →
$$\sum_{i=1}^{6} y_{8500\bullet} = y_{8500(1)} + y_{8500(2)} + y_{8500(3)} + y_{8500(4)} + y_{8500(5)} + y_{8500(6)}$$
$$\sum_{i=1}^{6} y_{8500\bullet} = 90.3 + 89.2 + 98.2 + 93.9 + 87.4 + 97.9 = 556.9$$

Ejemplo calculando $y_{\bullet j}$:

Para el Lote de Resina 1 (Bloque 1) →

$$\sum_{j=1}^{4} y_{\bullet 1} = y_{(8500)1} + y_{(8700)1} + y_{(8900)1} + y_{(9100)1}$$

$$\sum_{j=1}^{4} y_{\bullet 1} = 90.3 + 92.5 + 85.5 + 82.5 = 350.8$$

Ejemplo calculando $y_{\bullet\bullet}$:

Se puede calcular sumando cada uno de los tratamientos de los diferentes bloques o simplemente

$$y_{\bullet\bullet} = \sum_{i=1}^{4} y_{i\bullet} + \sum_{j=1}^{6} y_{\bullet j}$$

$$y_{\bullet\bullet} = (556.9 + 550.1 + 533.5 + 514.6) + (350.8 + 359.0 + 364.0 + 362.2 + 341.3 + 377.8) = 2155.1$$

Análisis de Varianza:

Para realizar el análisis de varianza hay que calcular las siguientes sumas de cuadrados:

$$SS_T = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} y_{ij}^2 - \frac{y_{\bullet\bullet}^2}{N}$$

$$= 193{,}999.31 - \frac{(2155.1)^2}{24} = 480.31$$

$$SS_{Treatments} = \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{4} y_{i\bullet}^2 - \frac{y_{\bullet\bullet}^2}{N}$$

$$= \frac{1}{6}\left[(556.9)^2 + (550.1)^2 + (533.2)^2 + (514.6)^2\right] - \frac{(2155.1)^2}{24} = 178.17$$

$$SS_{Blocks} = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{6} y_{\bullet j}^2 - \frac{y_{\bullet\bullet}^2}{N}$$

$$= \frac{1}{4}\left[(350.8)^2 + (359.0)^2 + \cdots + (377.8)^2\right] - \frac{(2155.1)^2}{24} = 192.25$$

$$SS_E = SS_T - SS_{Treatments} - SS_{Blocks}$$

$$= 480.31 - 178.17 - 192.25 = 109.89$$

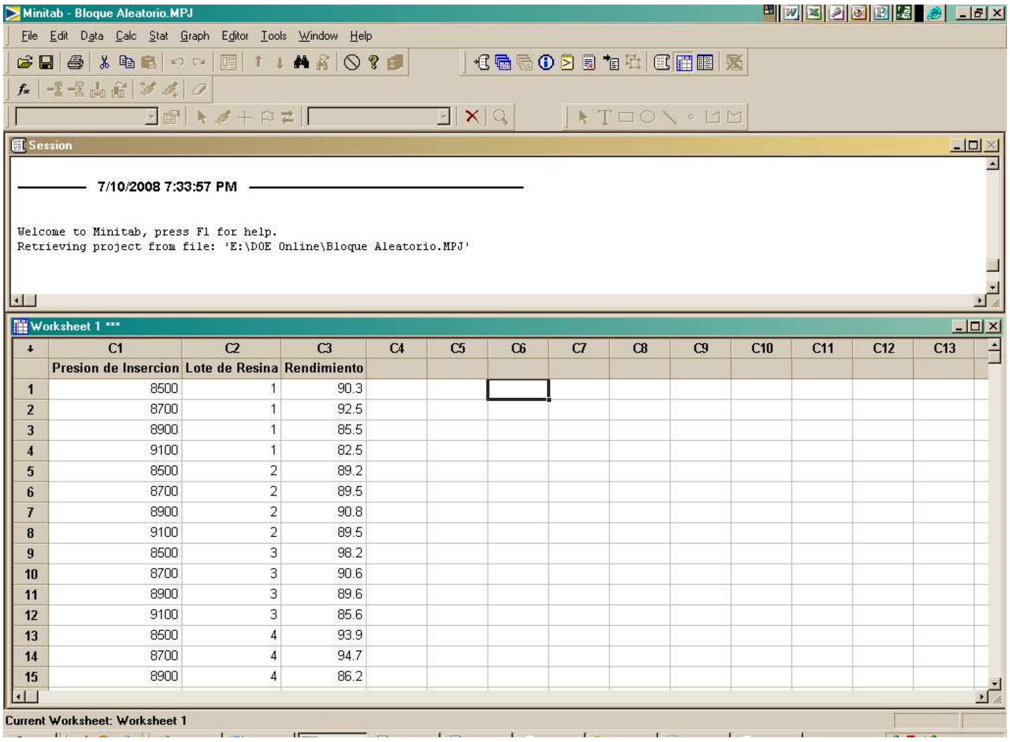
Llenando la tabla de ANOVA haciendo cada uno de los cálculos con las formulas en la tabla anterior tenemos el siguiente resultado:

Resultados de ANOVA					
Fuente de Variación	Suma de Cuadrado	Grados de Libertad	Promedio Cuadrado	F_0	*P*-Value
Tratamientos (Presión de Inserción)	178.17	3	59.39	8.11	0.0019
Bloques (Lotes)	192.25	5	38.45		
Error	109.89	15	7.33		
Total	480.31	23			

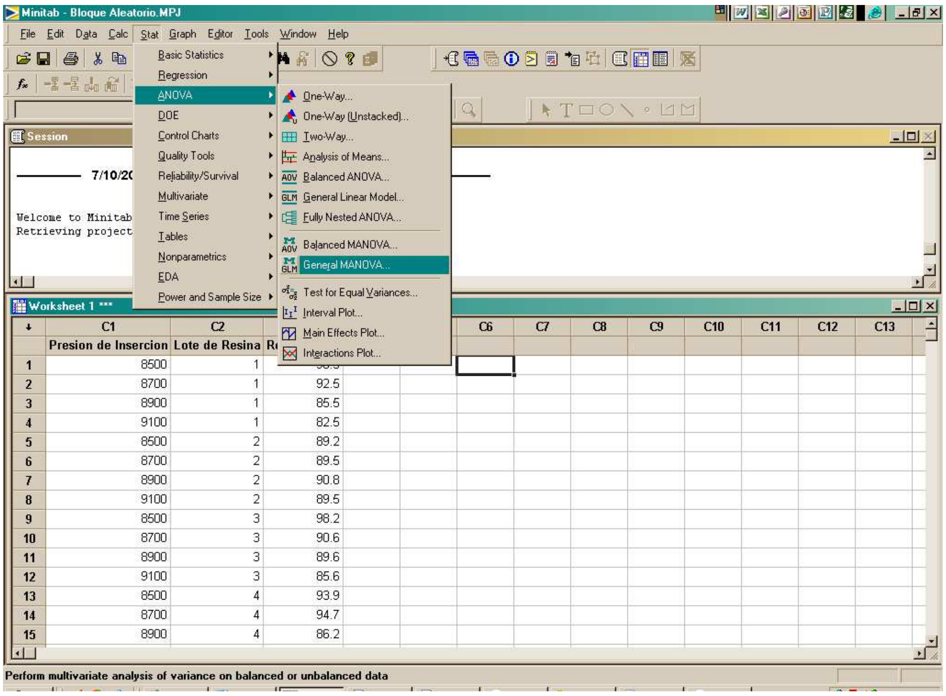
Usando un α = 0.05, el valor crítico de *F* es $F_{0.05,9,15} = 3.29$. Este valor se obtiene de las tablas para la distribución *F*. Debido a que $F_0 > F_{0.05,9,15} = 8.11 > 3.29$, concluimos que la presión de inserción afecta el rendimiento promedio. El *P*-Value de la prueba también es bien pequeño lo que significa que el experimento es aceptable. También, los lotes de resina (bloques) parecen diferir de forma significativa, debido a que el promedio cuadrado para los bloques es grande en relación con el error.

Ejemplo usando MINITAB

En Minitab, en la pantalla de ***WORKSHEET***, ingresamos la data que está en la tabla 2. Se ingresan tres columnas de datos. Una columna que identifique el tipo de presión de inserción, otra que identifique los lotes de resina y otra que tenga la variable respuesta, en este caso el rendimiento, que concuerde con el tipo de presión y lote de resina.

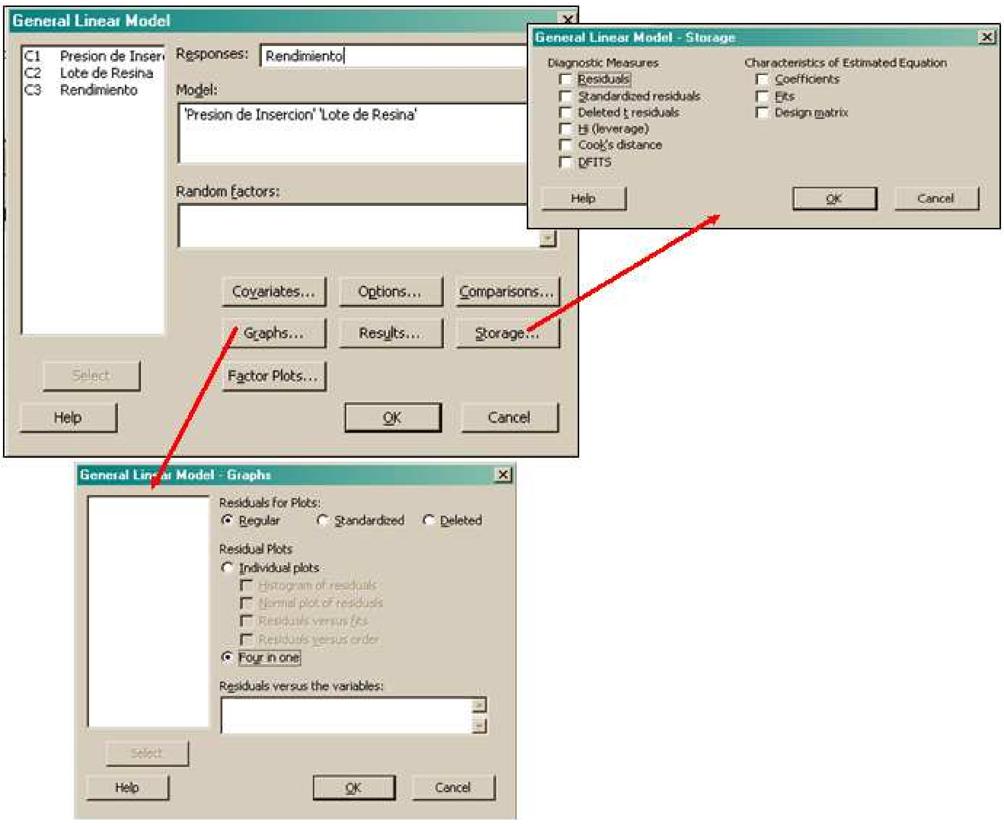


Como queremos realizar un ANOVA con un factor y un efecto bloqueado utilizamos la opción de **"General Linear Model"** y la seleccionamos como se presenta a continuación.



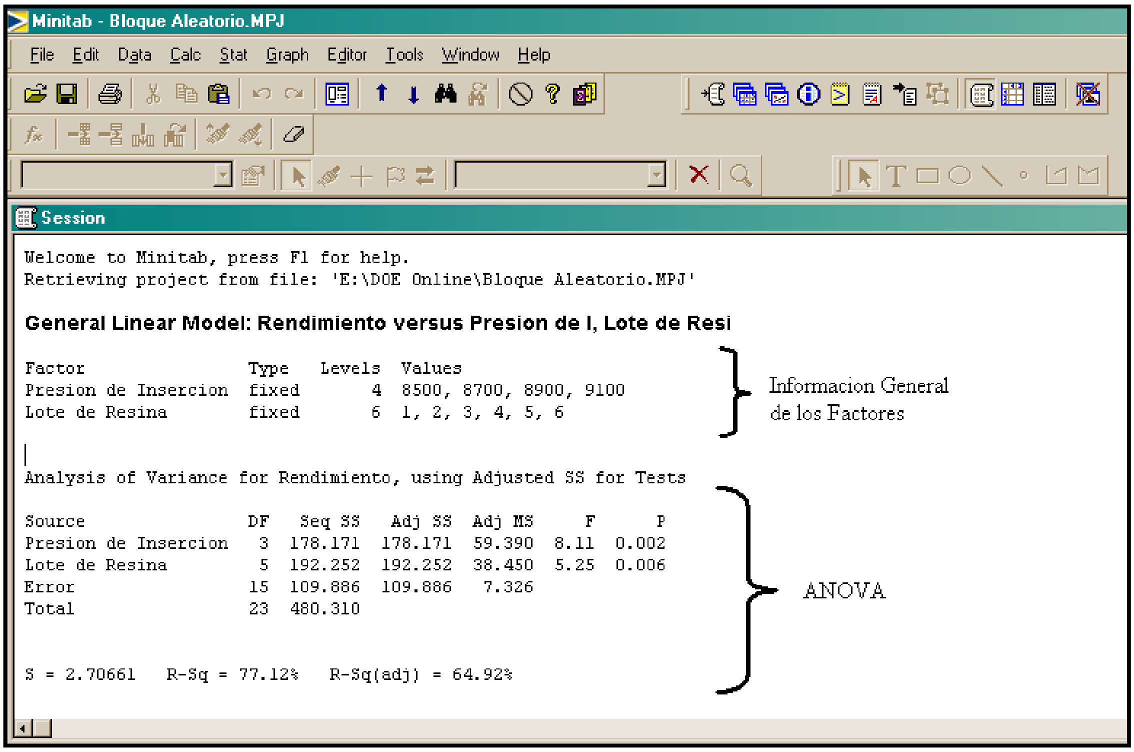
Al hacer esta selección aparecerá la siguiente pantalla en donde tiene que seleccionar la variables respuesta, **«Response»**, y el modelo que esta considerando, **«Model»**.
Para seleccionar la variable respuesta coloque el cursor en la casilla de "Response" y aparecerán las columnas que contienen data en la casilla de la izquierda. Seleccione Rendimiento dándole doble clic a la columna rendimiento en la casilla izquierda o selecciona la columna rendimiento y presiona el botón de **«Select»**. En la casilla de Model debe seleccionar tanto la columna de Presión de Inserción como la columna de Lote de Resina. Lo único que tiene que hacer colocar el cursor en la casilla del modelo y luego selecciona las columnas correspondientes dándolo doble clic.

En la opción de **«Storage»** nos permite almacenar en una columna del WORKSHEET los residuales y los valores estimados obtenidos a través del modelo. En la opción de **«Graph»** podemos obtener las graficas con las cuales podemos hacer el análisis de los residuales y determinar si hay normalidad en los datos.



Presionar **«OK»** cuando haya seleccionado todo lo deseado.

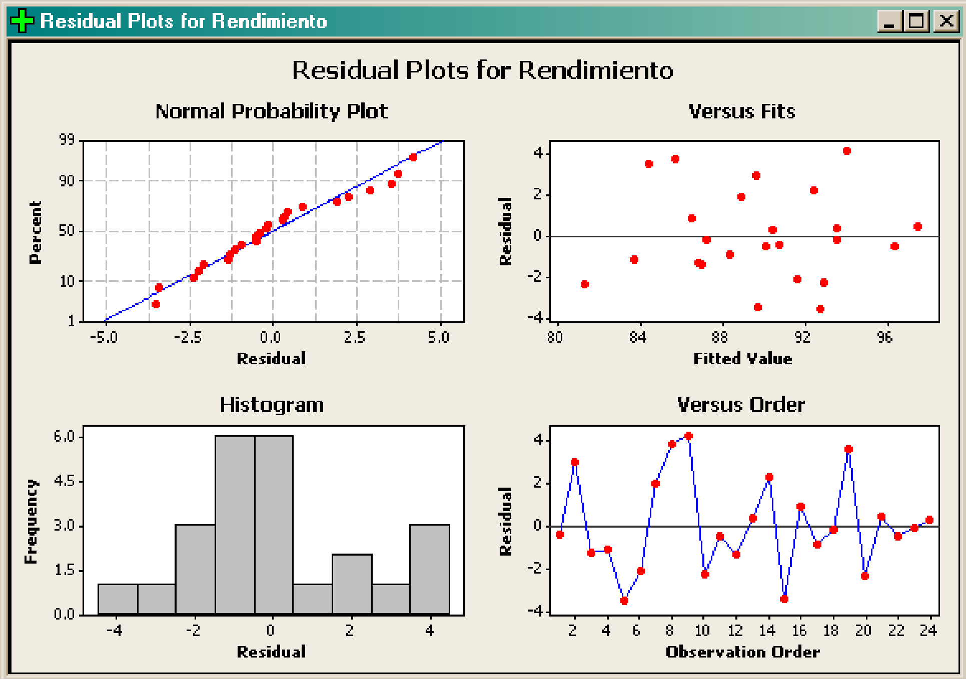
Los resultados del ANOVA aparecerán en la ventana de «Session» como se muestra en la próxima figura. La primera parte es una información general de los factores usados en el modelo, que fueron Presión de Inserción y Lote de Resina.



Si comparamos los resultados obtenidos usando Minitab con los resultados calculados con las ecuaciones podemos notar que son los mismos, lo que demuestra que el software de Minitab es una herramienta muy eficaz en diseño de experimentos. Otra información útil provista por el software de Minitab es el “R-Sq” que se define como la proporción de la variabilidad de la data explicada por el modelo de ANOVA. Esta cantidad de calcula usando la siguiente ecuación:

$R^2 = \frac{SS_{Model}}{SS_{Total}}$. A mayor porciento más confiable y deseable es el modelo utilizado. Si este porciento está por debajo del 60%, entonces el modelo utilizado no es el mejor que describe la data.

Entre las presunciones de ANOVA el análisis de varianza supone que los errores del modelo, y por ende las observaciones, tienen una distribución normal e independiente con la misma varianza en cada nivel del factor. Estas presunciones se pueden verificar examinando los residuales. Un residual es la diferencia entre la observación real y_{ij} y el valor $\hat{y}_{ij}$ que se hubiera obtenido de un ajuste de mínimos cuadrados del modelo de ANOVA fundamental. A continuación se presentan las gráficas obtenidas en Minitab del análisis de residuales:



La gráfica de normalidad nos permite visualizar que los datos están normalmente distribuidos ya que la dispersión de los residuales esta sobre la línea de normalidad. La gráfica de histograma nos permite corroborar que los datos están normalmente distribuidos con media igual a cero ya que el histograma tiene forma de campana centralizada en el punto cero. La grafica de los residuales versus los valores ajustados nos permite visualizar y corroborar la presunción de independencia de los datos ya que no siguen un patrón sino que están dispersos de forma aleatoria.

2. Experimento Cuadrado Latino

Este tipo de diseño se utiliza cuando existen 2 fuentes de ruido o variabilidad que son conocidas por el experimentador. En la sección anterior se definió el experimento de bloque completamente aleatorio, el cual permite bloquear una fuente de variabilidad conocida; bajo el experimento cuadrado latino, se permite bloquear dos fuentes de variabilidad conocidas.

El modelo que define este tipo de experimento esta dado por:

$$y_{ij} = \mu + \overset{\text{Efecto del tratamiento}}{\tau_i} + \underbrace{\overset{\text{Efecto de la Columna}}{\beta_j} + \overset{\text{Efecto de la Fila}}{\gamma_k}}_{2\ \text{Bloques}} + \varepsilon_{ik}$$

Suponga que un experimentador está investigando el efecto de 5 tipos de formulaciones de combustible (usado en la operación de una caldera), para observar el efecto en la tasa de combustión. Cada formula de combustible se tomó de un lote que solo da para 5 pruebas. Además de esto, las formulas son preparadas por diferentes operadores, que al ser personas, tienen diferentes habilidades y adquisición de experiencia. De esta manera, se puede observar dos factores de ruido o variabilidad que son identificables por el experimentador y que se pueden bloquear: los lotes de material y los operadores. Así, el diseño apropiado seria hacer las pruebas para observar la tasa de combustión de las formulaciones; teniendo en cuenta que se debe hacer el test probando cada formulación exactamente una vez en cada lote de materia prima, y, además, cada formulación debe ser preparada exactamente una vez por cada operador. La siguiente tabla ilustra lo anteriormente descrito:

	Operadores				
Lote de materia prima	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Lote 1	A=24	B=20	C=19	D=24	E=24
Lote 2	B=17	C=24	D=30	E=27	A=36
Lote 3	C=18	D=38	E=26	A=27	B=21
Lote 4	D=26	E=31	A=26	B=23	C=22
Lote 5	E=22	A=30	B=20	C=29	D=31

Note que el diseño es un arreglo cuadrado y que las 5 formulaciones (A, B, C, D, E) o tratamientos, se denotan con letras latinas; de allí el nombre de cuadrado latino.

Las columnas y las filas representan 2 RESTRICCIONES EN LA ALEATORIEDAD.

En general, un cuadrado latino para p factores, es un cuadrado que tiene p columnas y p filas en cuyas celdas resultantes (p^2), hay p letras latinas que corresponden a los tratamientos, y cada una de estas letras ocurre una vez y solamente una vez en cada fila y cada columna. Este modelo no tiene interacción entre las filas, columnas y tratamientos.

Al observar la tabla también se puede ver que al tener la posición de los suscritos j y k se puede encontrar la posición del suscrito i, es decir, si j (columna) = 3 y el suscrito k (fila) = 4, entonces el suscrito i (correspondiente a la respuesta) = 26.

Análisis de varianza para el experimento cuadrado latino:

El análisis de varianza consiste en partir la suma de cuadrados totales de las N = p^2 observaciones en componentes para las filas, columnas, tratamientos y error, por ejemplo:

$$SS_{Total} = SS_{filas} + SS_{columnas} + SS_{tratamientos} + SS_{Error}$$

Los grados de libertar respectivos son:

$$p^2 - 1 = p - 1 + p - 1 + p - 1 + (p-2)(p-1)$$

En cuanto al estadístico de prueba, para el probar la hipótesis de que no hay diferencia entre las medias de los tratamientos y para probar los efectos de las columnas y las filas tenemos:

$$F_0 = \frac{MS_{tratamientos}}{MS_E}$$

Test para el Efecto
de los tratamientos

Este estadístico bajo la hipótesis nula se distribuye como: $F_{p-1,(p-2)(p-1)}$.

El procedimiento para hacer el Anova en términos de los tratamientos, columnas y filas para el cuadrado latino, resulta ser una extensión del procedimiento hecho para el experimento de bloque completamente aleatorio. A continuación se presenta la tabla de Anova para este caso:

Anova para el modelo de Cuadrado latino				
Fuente de Variación	**Suma de Cuadrados**	**Grados de Libertad**	**Promedio Cuadrado**	**F_0**
Tratamientos	$SS_{trat} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} y_{i..}^2 - \frac{y_{...}^2}{N}$	p-1	$\frac{SS_{tratamiento}}{p-1}$	$F_0 = \frac{MS_{tratamientos}}{MS_E}$
Filas	$SS_{filas} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} y_{..k}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$	p-1	$\frac{SS_{filas}}{p-1}$	
Columnas	$SS_{col} = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} y_{.j.}^2 - \frac{y_{...}^2}{N}$	p-1	$\frac{SS_{columnas}}{p-1}$	
Error	SS_E se calcula por resta	(p-2)(p-1)	$\frac{SS_E}{(p-2)(p-1)}$	
Total	$SS_{Total} = \sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{N}$	p^2-1		

Ejemplo1:

Teniendo en cuenta la situación anteriormente descrita sobre las pruebas de la tasa de combustión de 5 formulaciones, se procede a comprobar la igualdad de los efectos de los tratamientos de la siguiente manera:

$$Ho: \tau_A = \tau_B = \ldots \tau_E$$

$$H_1: \tau_A \neq \tau_B \neq \ldots \tau_E$$

Teniendo las hipótesis a probar claras, se procede a realizar los cálculos que faciliten llegar a las sumatorias de cuadrados de cada uno de los componentes. A continuación se presenta la tabla con los respectivos cálculos:

	Operadores					
Lote de materia prima	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**$y_{..k}$**
Lote 1	A=24	B=20	C=19	D=24	E=24	111
Lote 2	B=17	C=24	D=30	E=27	A=36	134
Lote 3	C=18	D=38	E=26	A=27	B=21	130
Lote 4	D=26	E=31	A=26	B=23	C=22	128
Lote 5	E=22	A=30	B=20	C=29	D=31	132
$y_{.j.}$	107	143	121	130	134	$y_{...}$= 635

Totales para los tratamientos (formulaciones):

Letra latina	Tratamiento	Total
A	$y_{1..}$	24+30+…36 = 143
B	$y_{2..}$	101
C	$y_{3..}$	112
D	$y_{4..}$	149
E	$y_{5..}$	130

Ahora se procede a calcular las sumas de cuadrados para los tratamientos, las filas, las columnas, el error y la suma de cuadrados total:

$$SS_{total} = \sum_i \sum_j \sum_k 24^2 + 17^2 + 18^2 + ... + 31^2 - \frac{635^2}{25} = 676$$

$$SS_{lotes\_filas} = \frac{1}{5}\sum_{K=1}^{5}[111^2 + 134^2 + ... + 132^2] - \frac{635^2}{25} = 68$$

$$SS_{operadores\_columnas} = \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5}[107^2 + 143^2 + ... + 134^2] - \frac{635^2}{25} = 150$$

$$SS_{formulaciones\_tratamientos} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}[143^2 + 101^2 ... + 130^2] - \frac{635^2}{25} = 330$$

$$SS_{Error} = SS_{total} - SS_{lotes} - SS_{operadores} - SS_{formulaciones} = 676 - 68 - 150 - 330 = 128$$

Ahora se procede a construir la tabla de Anova:

Anova para el modelo de Cuadrado latino				
Fuente de Variación	**Suma de Cuadrados**	**Grados de Libertad**	**Promedio Cuadrado**	**F_0**
Formulaciones	330	p-1 = 5-1 = 4	$\frac{SS_{tratamiento}}{p-1} = \frac{330}{4} = 82.5$	$F_0 = \frac{MS_{tratamientos}}{MS_E} = \frac{82.5}{10.67} = 7.73$
Lotes	68	p-1 = 4	$\frac{SS_{filas}}{p-1} = 17$	
Operadores	150	p-1 = 4	$\frac{SS_{columnas}}{p-1} = 37.5$	
Error	128	(p-2)(p-1) = 12	$\frac{SS_E}{(p-2)(p-1)} = 10.67$	
Total	676	p^2-1 = 24		

Al calcular $Fp_{-1,(p-2)(p-1)}$ con un nivel de significancia de 0.05 en las tablas de la distribución F, se obtiene el valor de F critica = 3.36. Por lo tanto:

$$F_{calculada} > F_{critica} \longrightarrow 7.73 > 3.36$$

Al ser mayor la F calculada, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que hay una diferencia significativa en la tasa de combustión promedio, generada por las diferentes formulaciones del combustible.

Ejemplo 2: situación que describe un experimento tipo cuadrado latino

Una compañía de pintura quiere evaluar la habilidad de cuatro tipos de pintura blanca para tolerar las inclemencias del tiempo. Para efectuar esta prueba se han construido cuatro casas cuadradas en las que se garantiza que uno de los lados mira exactamente al norte.

1. Diseño Factorial

En un ***experimento factorial*** se analizan todas las posibles combinaciones de los niveles de los factores en cada réplica del experimento. Por ejemplo, si el factor A tiene *a* niveles y el factor B tiene *b* niveles entonces cada replica tiene *ab* combinaciones posibles como muestra la figura 1.

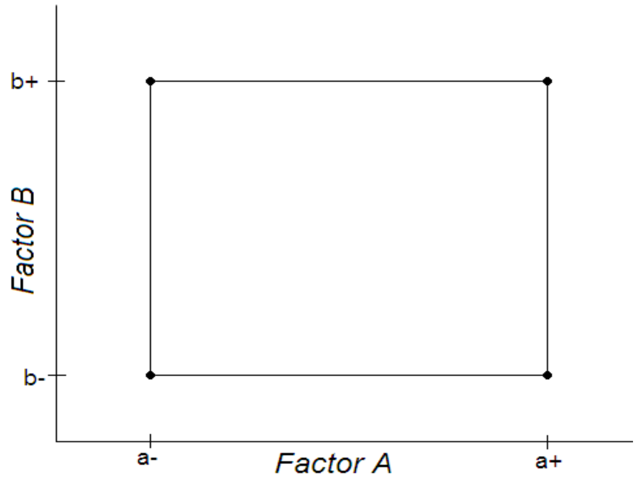


Figura 1. Combinaciones posibles para A y B.

El ***efecto*** de un factor se define como el cambio en respuesta producido por un cambio en el nivel del factor. En algunos experimentos podemos encontrar que la diferencia en respuesta entre los niveles de un factor no es la misma en todos los niveles del otro factor. Cuando esto ocurre se dice que hay ***iteración*** entre los factores. Como podemos ver en la figura 2 la interacción no está presente ya que cuando cambio el factor A de su nivel 1 al nivel 2 la respuesta aumenta no importando en qué nivel esté el factor B. Sin embargo, en la figura 3 podemos apreciar el comportamiento del gráfico cuando existe interacción entre los factores.

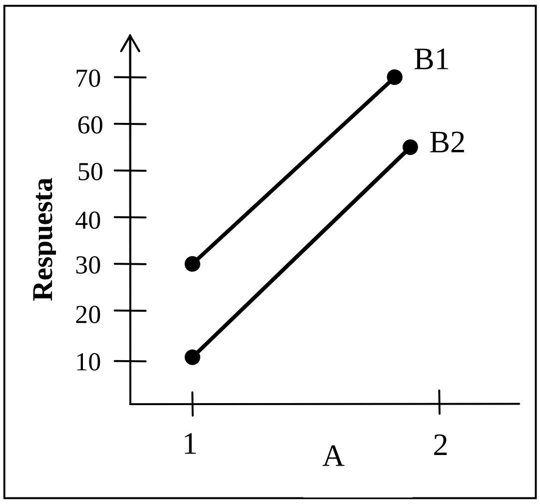


Figura 2. Grafica cuando no existe interacción entre los factores.

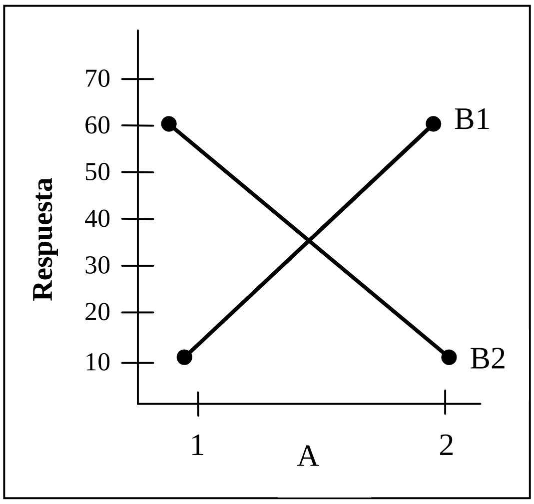


Figura 3. Grafica cuando existe interacción entre los factores.

El factorial más pequeño es el que tiene 2 factores con 2 niveles cada uno. Las posibles combinaciones de este experimento forman los vértices de un cuadrado como se muestra en la figura anterior. Si utilizamos el método de variar un factor a la vez para explorar cada una de las combinaciones nos encontramos que éste método es inefectivo debido a que (como se muestra en la figura 4) una de las posibles combinaciones queda sin explorar. Además, para factoriales con más de 2 factores resultaría ineficiente e inadecuado.

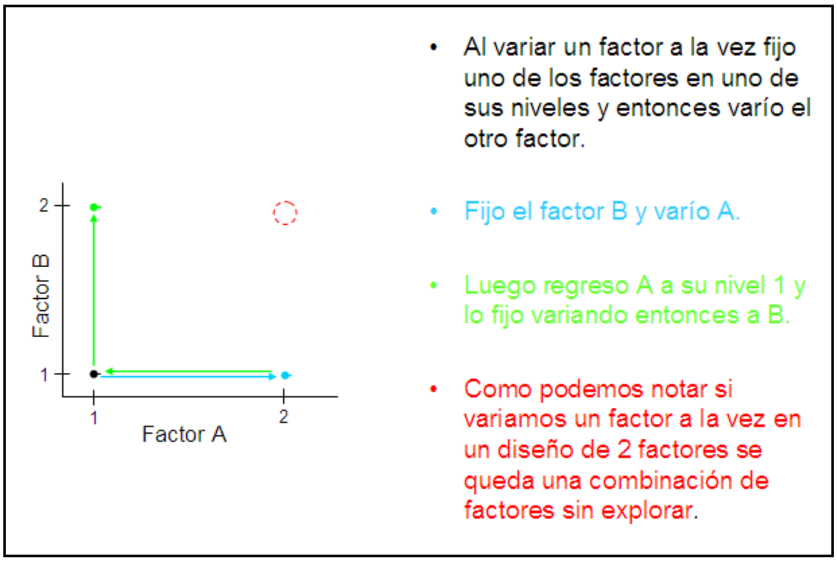


Figura 4. Gráfica que ilustra cuando se varía un factor a la vez en un factorial de 2 factores.

Si tenemos un factorial con 3 factores cada uno con 2 niveles, las posibles combinaciones de este experimento forman los vértices de un cubo como se muestra en la figura 5. Al variar un factor a la vez solo se pueden explorar la mitad de las posibles combinaciones. En la figura 4 podemos notar los espacios vacíos de las combinaciones sin explorar.

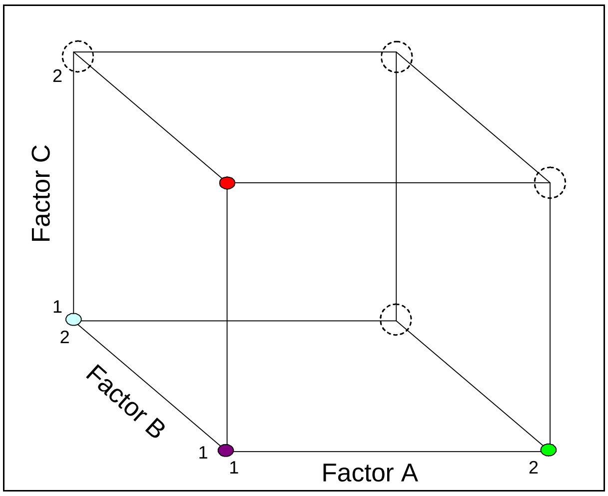


Figura 5. Factorial de 3 factores ilustrando combinaciones sin explorar al utilizar el método de variar un factor a la vez.

Variar un factor a la vez resulta un método ineficiente y nunca va a llegar a su valor óptimo. Es por esto que una de las ventajas de un diseño factorial es que son más eficientes que los experimentos de un factor a la vez. Además, un diseño factorial es necesario cuando pueden haber iteraciones presentes para evitar conclusiones engañosas. Finalmente, los diseños factoriales permiten estimar los efectos de un factor a varios niveles de los otros factores, generando conclusiones válidas sobre un rango de condiciones experimentales.

Los experimentos a menos dimensiones me dan más réplicas. Si tengo un experimento con tres dimensiones (A, B y C) y elimino la dimensión C, es como si se trasladara la capa superior hacia abajo resultándome 2 datos por cada vértice del cuadrado resultante como se puede apreciar en la figura 6.

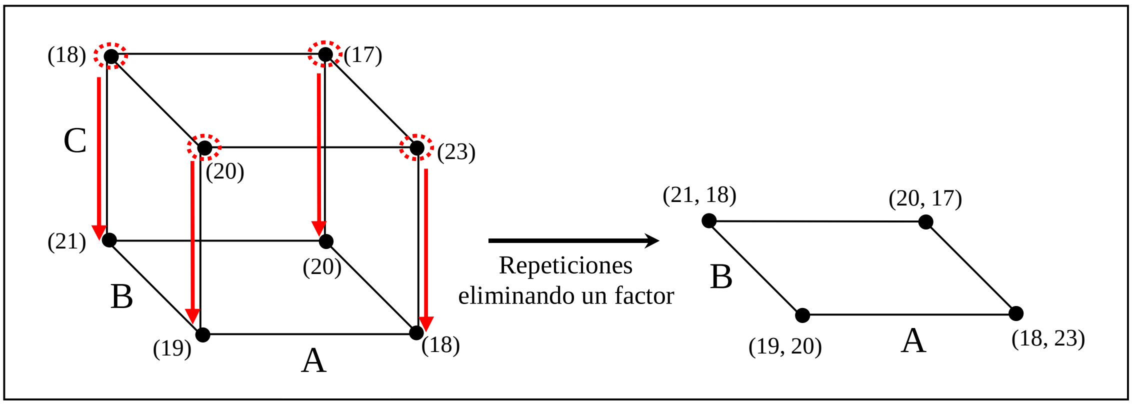


Figura 6. Ilustración de cómo se obtienen repeticiones cuando se elimina uno de los factores; en este ejemplo se eliminó el factor C.

La representación de ANOVA para un diseño de experimento factorial de 2 factores esta dada por el siguiente modelo:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk},$$

donde el término $(\tau\beta)_{ij}$ es el efecto de la interacción entre el factor A y el factor B, y y_{ijk} es la respuesta observada cuando el factor A esta en el nivel *i* y el factor B está en el nivel *j* para la réplica *k*.

La ecuación fundamental de ANOVA está dada por la suma de los cuadrados y se expresa de la siguiente manera teniendo el factor A con *a* niveles y el factor B con *b* niveles:

$$SS_{total} = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_{error}$$

La ecuación fundamental de ANOVA para un solo factor era

$$SS_{total} = SS_{Tratamiento} + SS_{error},$$

Una forma de visualizar la ecuación de ANOVA para 2 factores es como si expandiéramos la suma de los cuadrados del tratamiento de la ecuación de un solo factor como se muestra a continuación:

$$SS_{total} = SS_{Tratamiento} + SS_{error},$$

Expansion de la suma de cuadrados del tratamiento cuando se tienen 2 factores

$$SS_{total} = \boxed{SS_A + SS_B + SS_{AB}} + SS_{error}$$

Los términos de la suma de los cuadrados se calculan como se muestra a continuación:

Suma de cuadrados totales:

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \frac{y_{\bullet\bullet\bullet}^2}{abn}$$

Suma de los cuadrados de los efectos son:

$$SS_A = \frac{1}{bn}\sum_{i=1}^{a} y_{i\bullet\bullet}^2 - \frac{y_{\bullet\bullet\bullet}^2}{abn} \qquad \text{y} \qquad SS_B = \frac{1}{an}\sum_{j=1}^{b} y_{\bullet j\bullet}^2 - \frac{y_{\bullet\bullet\bullet}^2}{abn}$$

Es conveniente obtener la suma de los cuadrados de la interacción, SS_{AB}, en dos fases. Primero, se calcula la suma de cuadrados entre los totales de las celdas *ab* que se conoce como la suma de cuadrados debido a "subtotales":

$$SS_{Subtotals} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij\bullet}^2 - \frac{y_{\bullet\bullet\bullet}^2}{abn}$$

Esta suma de cuadrados también contiene SS_A y SS_B. Por lo tanto, el segundo paso es calcular la suma de cuadrados de la interacción como sigue:

$$SS_{AB} = SS_{Subtotals} - SS_A - SS_B$$

Ahora por substracción podemos calcular la suma de cuadrados del error como sigue:

$$SS_E = SS_T - SS_{AB} - SS_A - SS_B \qquad \text{ó} \qquad SS_E = SS_T - SS_{Subtotals}$$

A continuación se presenta la tabla de ANOVA para el Factorial de 2 factores:

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrado Promedio	F_o
A tratamientos	SS_A	$a-1$	$MS_A = \dfrac{SS_A}{a-1}$	$F_o = \dfrac{MS_A}{MS_E}$
B tratamientos	SS_B	$b-1$	$MS_B = \dfrac{SS_B}{b-1}$	$F_o = \dfrac{MS_B}{MS_E}$
Interacción	SS_{AB}	$(a-1)(b-1)$	$MS_{AB} = \dfrac{SS_{AB}}{(a-1)(b-1)}$	$F_o = \dfrac{MS_{AB}}{MS_E}$
Error	SS_E	$ab(n-1)$	$MS_E = \dfrac{SS_E}{ab(n-1)}$	
Total	SS_T	$abn-1$		

Ejemplo Numérico:

Tenemos 2 factores (A y B) a dos niveles cada uno (1 y 2) donde cada combinación tiene dos réplicas. Se quiere calcular la suma de cuadrados de cada efecto, (tratamientos A y B, la interacción, el error y el total). La data se encuentra en la siguiente tabla:

		A	
		1	*2*
B	*1*	8 9	4 3
	2	10 12	14 16

Realizamos la suma por fila y por columnas para facilidad de los cálculos.

		A		
		1	*2*	Σ
B	*1*	8 9	4 3	24
	2	10 12	14 16	52
Σ		39	37	76

Calculando la suma de cuadrados de los efectos tenemos:

$$SS_A = \frac{39^2 + 37^2}{4} - \frac{(76)^2}{8} = 0.5$$

$$SS_B = \frac{24^2 + 52^2}{4} - \frac{(76)^2}{8} = 98$$

$$SS_{Total} = 8^2 + 9^2 + \cdots + 14^2 + 16^2 - \frac{(76)^2}{8} = 144$$

Para poder buscar la interacción hacemos una expansión (booleana):

11	**21**	**12**	**22**	
8	4	10	14	
9	3	12	16	
17	7	22	30	76

$$SS_{Tratamiento} = \frac{17^2 + 7^2 + 22^2 + 30^2}{2} - \frac{(76)^2}{8} = 139$$

$$SS_{AB} = SS_{Tratamientos} - SS_A - SS_B$$

$$= 139 - 0.5 - 98 = 40.5$$

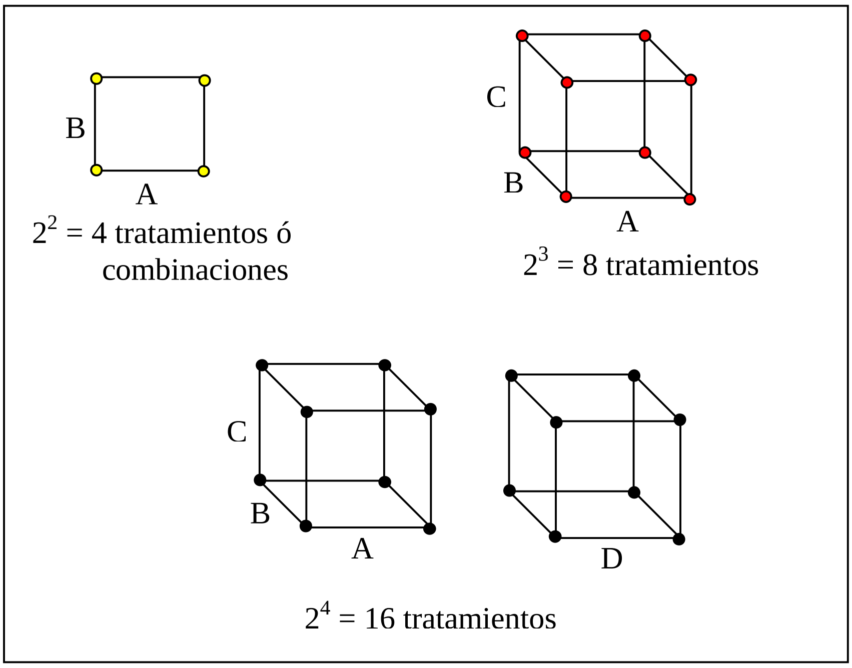
$$SS_{Error} = SS_{Total} - SS_A - SS_B - SS_{AB}$$

$$= 144 - 0.5 - 98 - 40.5 = 5$$

Si todos los factores en un experimento factorial tienen 2 niveles, conocemos estos factores como 2^k donde k es el número de factores.

2^k = número de tratamientos o condiciones experimentales

En la siguiente figura se muestra como se verían representados los tratamientos o combinaciones de este tipo de diseño experimental tomando diferentes valores de *k*.



Como podemos apreciar en la figura anterior, a mayor número de factores mayor es el número de tratamientos o combinaciones a realizar dentro del experimento. En los siguientes temas se discutirá el diseño factorial 2^k y el diseño factorial 2^k con bloques, que es cuando no se pueden realizar cada una de las posibles combinaciones o tratamientos.

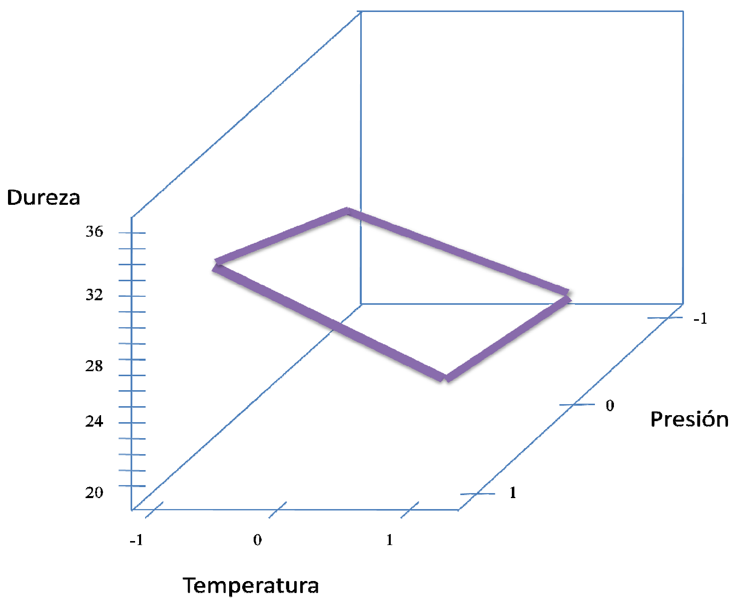
1. Regresión Lineal

Los factores envueltos en la experimentación pueden ser de tipo cuantitativos o cualitativos. Un factor cuantitativo es aquel que sus niveles pueden ser asociados con puntos dentro de una escala numérica, como la temperatura, el tiempo o la presión. Un factor cualitativo, es aquel que sus niveles no pueden ser organizados por el orden de su magnitud, en este caso se pueden mencionar personas u operadores, lotes de producción, turnos de trabajo etc.

La regresión lineal trabaja con factores de tipo cuantitativos. Este modelo puede ser utilizado para predecir la respuesta en cualquier punto del espacio contenido dentro de la región experimental, es decir, si por ejemplo los niveles de temperatura analizados son 100 y 200, el modelo de regresión le permite al experimentador hacer inferencias sobre una temperatura que se encuentre entre 100 y 200.

El modelo de regresión caracteriza la relación entre una variable respuesta que depende de k variables independientes o regresoras.

Para ilustrar lo anterior, suponga que se desea medir la dureza de un elemento bajo dos niveles distintos de temperatura y dos niveles distintos de presión. Al realizar las medidas se obtiene el siguiente grafico:



Al observarlo se puede determinar que el factor temperatura tiene una influencia mayor en la dureza que el factor presión. Esto porque los cambios de temperatura proveen una pendiente más inclinada que la pendiente que proveen los cambios en la presión. Para comparar entonces la influencia de los factores en la variable respuesta es relevante encontrar la pendiente de los factores de interés (temperatura y presión).

Un método para obtener las pendientes y establecer un modelo matemático que describa la situación sería un modelo de regresión. Para este caso particular donde hay dos variables predictoras y una variable respuesta el modelo seria:

$$y = Bo + B_1 X_1 + B_2 X_2 + \varepsilon$$

Donde las B's representan los coeficientes del modelo de regresión, siendo Bo el intercepto del plano, B_1 el cambio esperado en la variable respuesta por unidad de cambio en la variable X_1 (temperatura), B_2 el cambio esperado en la variable respuesta por unidad de cambio en la variable X_2 (presión) y ε representa el error o residuo del modelo.

En forma matricial, el modelo de regresión puede ser expresado así:

$$y = BX + \varepsilon$$

Donde:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 1X_{11} & X_{12} & \ldots X_{1k} \\ 1X_{21} & X_{22} & \ldots X_{2k} \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ 1X_{n1} & X_{n2} & \ldots X_{nk} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_o \\ B_1 \\ . \\ . \\ . \\ B_k \end{bmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ . \\ . \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Lo anterior muestra un vector y (de tamaño nx1) de las observaciones del experimento, X es la matriz de diseño (de tamaño nxp) de los niveles de las variables independientes, es decir los factores del experimento, B es un vector (de tamaño px1) de los coeficientes del modelo de regresión y ε es un vector (de tamaño nx1) de errores o residuales.

Para estimar los coeficientes de regresión B, es necesario basarse en un criterio. El criterio más utilizado es el de minimizar la suma de cuadrados de los errores, de manera que se pueda encontrar aquellos estimadores de los coeficientes de regresión que minimicen la suma de cuadrados de los errores:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_n^2 = \varepsilon'\varepsilon = (y - XB)'(y - XB)$$

L puede ser expresada como:

$$L = y'y - B'Xy - y'XB + B'X'XB$$
$$L = y'y - 2B'X'y + B'X'XB$$

El término B'X'y es un escalar al igual que su transpuesta, por esta razón se puede agrupar el segundo término de esta manera. Ahora la derivada de L con respecto a B resulta en:

$$\left.\frac{\partial L}{\partial B}\right|_b = -2X'y + 2X'Xb = 0 \rightarrow X'Xb = X'y$$

Así los estimadores para los coeficientes que minimizan la suma de cuadrados de los errores se obtienen:

Formula que se utiliza para encontrar los coeficientes B

$$b = (X'X)^{-1}X'y$$

Las propiedades de la varianza de b se expresan mediante la matriz de varianza-covarianza. Esta es una matriz simétrica de tamaño p x p, cuyos elementos contenidos en la diagonal son la varianza de b_j y cuyo elemento (i,j) representa la covarianza entre los elementos b_i y b_j. La matriz de covarianza del vector b está dada por:

$$Cov(b) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

Con regularidad será necesario estimar σ^2. Para estimar este parámetro se toma en cuenta la suma de cuadrados del residual, por medio de la cual se demuestra que:

$$E(SS_{\varepsilon}) = \sigma^2 (n - p)$$

Donde el termino n-p se refiere a los grados de libertad del error. De esta manera al despejar se consigue el estimador no sesgado para σ^2 :

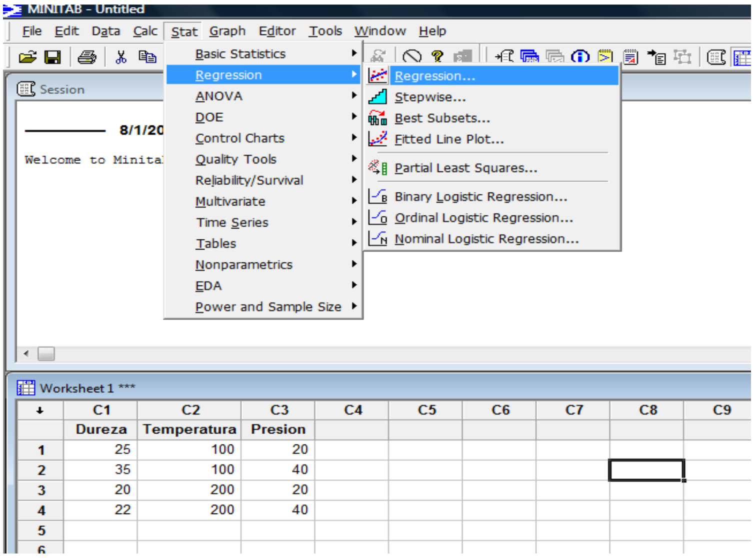
$$\sigma^2 = \frac{SS_{\varepsilon}}{(n - p)}$$

Ahora para ilustrar lo descrito se toma en cuenta el siguiente ejemplo: suponga que se está midiendo la dureza como función de dos factores, temperatura y presión. El experimentador tomo una observación en cada una de las condiciones y obtuvo el siguiente resultado:

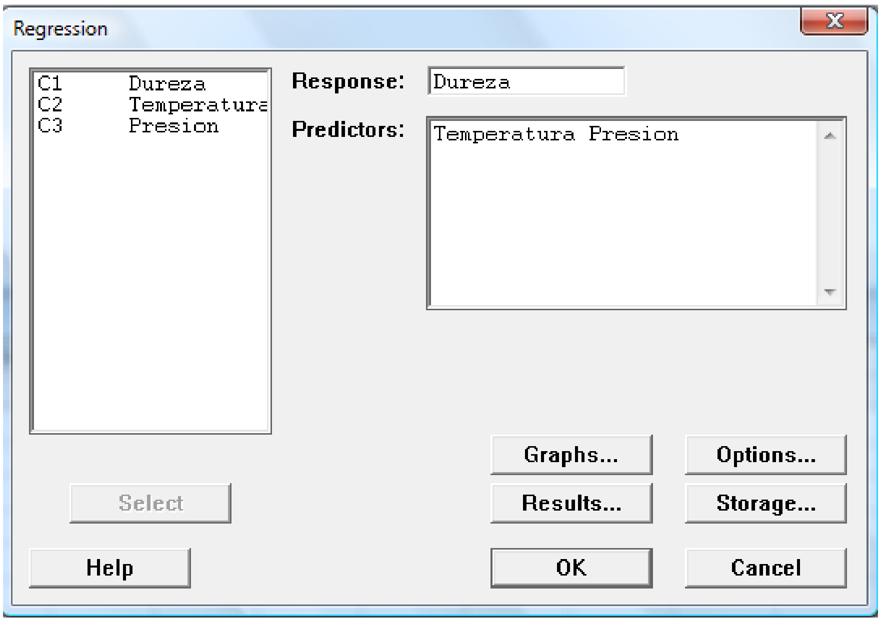
Dureza	Presión	Temperatura
25	20	100
35	40	100
20	20	200
22	40	200

Con este resultado, el experimentador utilizo el programa Minitab y realizo el cálculo para encontrar el modelo de regresión que se ajusta a los datos:

1. En el menú de stat, en regresión, se da click a la ventana desplegada en la opción de regresión como muestra la figura:



2. Luego se despliega la ventana donde se ingresan los datos. En la casilla de response se ingresa la columna de respuestas, en la casilla de predictors, se ingresan los datos correspondientes a los factores predictores o variables independientes como muestra la figura:



3. Al hacer click en el botón de ok se obtiene el siguiente resultado:

Regression Analysis: Dureza versus Temperatura, Presion

```
The regression equation is
Dureza = 30.0 - 0.0900 Temperatura + 0.300 Presion


Predictor        Coef  SE Coef      T      P
Constant       30.000    8.718   3.44  0.180
Temperatura  -0.09000  0.04000  -2.25  0.266
Presion        0.3000   0.2000   1.50  0.374


S = 4   R-Sq = 88.0%   R-Sq(adj) = 63.9%
```

La columna catalogada como coef, despliega los coeficientes predictores o betas, de esta manera la ecuación de regresión para el ejemplo se resume en:

$$Dureza = 30.0 - 0.09Temperatura + 0.30Presion$$

El termino R-sq representa el R^2 que define la variabilidad explicada por el modelo de regresión, es decir, el 88% de la variabilidad está siendo explicada por el modelo de regresión para el experimento conducido. De esta manera el modelo explica de forma suficiente los datos y por lo tanto la regresión se ajusta a ellos.

Observando la ecuación, no se le puede dar una explicación al intercepto Bo = 30 porque ninguno de los rangos de experimentación para los factores incluyen el cero, que es lo que se usa de referencia para explicar el intercepto.

Ahora en el caso de los factores, el interés es encontrar cuál de ellos afecta más la respuesta. Al observar la figura ubicada en la primera pagina de esta sección, se ve que la temperatura afecta la respuesta en mayor proporción que la presión. Sin embargo al observar el modelo de regresión que se ajusto al experimento, no se puede deducir lo mismo, por el contrario los coeficientes obtenidos a simple vista hacen pensar que la presión afecta la temperatura en mayor proporción. Esto se da porque ambos factores (temperatura y presión) están en diferentes escalas, es decir las escalas de los niveles de los factores miden diferentes características y por esto no se espera que coincidan, por lo tanto los coeficientes de los factores no son comparables.

Para lograr una comparación entre los coeficientes de los factores, se utilizan entonces las variables codificadas. La relación entre las variables naturales (medidas en su escala original) y las variables codificadas está dada por:

$$X_i = \frac{(\eta_i - \overline{\eta})}{\frac{rango}{2}}$$

Donde X_i es la variable codificada, η_i es la variable natural y $\overline{\eta}$ es el promedio de los niveles de la variable a ser codificada. Para el caso de experimentos 2^k (se estudiaran más adelante) donde hay k factores cada uno con dos niveles (como es el caso de este experimento), la codificación produce entonces 2 niveles, +1 y -1. En el caso del ejemplo, al codificar la variable temperatura se obtiene:

$$X_i = \frac{(100-150)}{\frac{200-100}{2}} = -1 \qquad X_i = \frac{(200-150)}{\frac{200-100}{2}} = 1$$

Esto describe que el nivel bajo de temperatura (100) ahora se codifico a un nivel -1 y el nivel alto (200) se codifico a un 1. La siguiente tabla muestra las variables codificadas:

Dureza	Presión	Temperatura
25	-1	-1
35	1	-1
20	-1	1
22	1	1

Al hacer el mismo procedimiento que se hizo para las variables naturales en Minitab, se obtiene el siguiente resultado para las variables codificadas:

Regression Analysis: Dureza_1 versus Presion_1, Temperatura_1

```
The regression equation is
Dureza_1 = 25.5 + 3.00 Presion_1 - 4.50 Temperatura_1


Predictor        Coef  SE Coef      T      P
Constant       25.500    2.000  12.75  0.050
Presion_1       3.000    2.000   1.50  0.374
Temperatura_1  -4.500    2.000  -2.25  0.266


S = 4   R-Sq = 88.0%   R-Sq(adj) = 63.9%
```

La ecuación de regresión ahora es:

$$\text{Dureza} = 25.5 - 4.5\text{Temperatura} + 3.0\text{Presion}$$

Ahora con este modelo se nota que el impacto mayor en la respuesta lo da el factor presión, ya que la misma va a variar en -4.5 por cada unidad de cambio en la temperatura. La constante 25.5 es ahora el valor de dureza esperado cuando ambas variables se encuentran en el valor nominal o nivel medio de cada variable. Por otro lado los coeficientes de las variables predictoras son comparables porque ambos se encuentran en la misma escala.

Prueba de hipótesis para el modelo de regresión

El interés frecuentemente es probar las hipótesis para determinar que coeficientes dentro del modelo de regresión son significativos. La hipótesis para probar la significación de cualquier coeficiente j, está dada por:

$$H_o : \beta_j = 0$$
$$H_1 : \beta_j \neq 0$$

Si el resultado de la prueba fuera que la hipótesis nula no es rechazada, entonces se puede concluir que la variable X_j asociada con el coeficiente β_j no impacta la respuesta significativamente y por tanto puede ser eliminada del modelo. La estadística de prueba para efectuar la prueba de hipótesis está dada por:

$$t_o = \frac{b_j}{\sqrt{C_{jj}(MSE)}}$$

Donde:

b_j: es el estimador de β_j

C_{jj}: elemento de la diagonal de la matriz de varianza-covarianza $(X'X)^{-1}$ correspondiente al coeficiente b_j.

MSE: estimador del error

Cabe aclarar que la covarianza es una medida de la relación entre dos variables. Si estas son independientes su covarianza es 0. Sin embargo el hecho de que la covarianza sea 0 no implica que las variables sean independientes

Para ilustrar la ubicación de los valores C_{jj} se muestra la siguiente matriz:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} b_o & b_1 & b_2 & \dots & b_k \end{array} \\ (X'X)^{-1} = & \begin{bmatrix} C_{00} & & & & \\ & C_{11} & & & \\ & & C_{22} & & \\ . & & & & \\ . & & & & \\ & & & & C_{kk} \end{bmatrix} \end{array}$$

Ejemplo 1

Suponga que se tienen dos factores A y B cada uno con dos niveles 1 y 2. El experimentador desea saber el impacto en la respuesta al variar los factores en sus diferentes niveles. Después de realizar un experimento factorial con dos replicas se obtuvo la siguiente respuesta:

	Factor A	
Factor B	1	2
1	8 9	4 3
2	10 12	14 16

Teniendo las respuestas se procede a:

1. Se define el vector de respuestas *y* el cual puede tener las respuestas en cualquier orden:

$$y = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 4 \\ 3 \\ 10 \\ 12 \\ 14 \\ 16 \end{bmatrix}$$

2. Se define la matriz X compuesta de los niveles correspondientes a la respuesta que se puso en el vector *y*. La matriz X contiene una columna por cada coeficiente a estimarse y una fila por cada dato de respuesta.

Coeficiente correspondiente a la interacción.

$b_3 = b_1 \text{ x } b_2$

$$
y=\begin{bmatrix}8\\9\\4\\3\\10\\12\\14\\16\end{bmatrix}\begin{matrix}\rightarrow\\\rightarrow\\\rightarrow\\\rightarrow\\\rightarrow\\\rightarrow\\\rightarrow\\\rightarrow\end{matrix}\quad X=\begin{array}{c} \begin{matrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & +1\\ 1 & -1 & -1 & +1\\ 1 & +1 & -1 & -1\\ 1 & +1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & +1 & -1\\ 1 & -1 & +1 & -1\\ 1 & +1 & +1 & +1\\ 1 & +1 & +1 & +1 \end{bmatrix}\end{array}
$$

Se puso -1 para el nivel más bajo (1) y +1 para el nivel más alto del factor (2)

3. Se procede a hallar X'X:

$$
X'=\begin{bmatrix} +1&+1&+1&+1&+1&+1&+1&+1\\ -1&-1&+1&+1&-1&-1&+1&+1\\ -1&-1&-1&-1&+1&+1&+1&+1\\ +1&+1&-1&-1&-1&-1&+1&+1 \end{bmatrix}\qquad X=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & +1\\ 1 & -1 & -1 & +1\\ 1 & +1 & -1 & -1\\ 1 & +1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & +1 & -1\\ 1 & -1 & +1 & -1\\ 1 & +1 & +1 & +1\\ 1 & +1 & +1 & +1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} +1&+1&+1&+1&+1&+1&+1&+1\\ -1&-1&+1&+1&-1&-1&+1&+1\\ -1&-1&-1&-1&+1&+1&+1&+1\\ +1&+1&-1&-1&-1&-1&+1&+1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & +1\\ 1 & -1 & -1 & +1\\ 1 & +1 & -1 & -1\\ 1 & +1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & +1 & -1\\ 1 & -1 & +1 & -1\\ 1 & +1 & +1 & +1\\ 1 & +1 & +1 & +1 \end{bmatrix} = X'X = \begin{bmatrix} 8&0&0&0\\ 0&8&0&0\\ 0&0&8&0\\ 0&0&0&8 \end{bmatrix}
$$

4. Se procede a sacar la inversa de X'X = $(X'X)^{-1}$

$$X'X = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix}$$

Los ceros representan la covarianza. Como puede observarse los coeficientes en este caso no tendrán influencia sobre los demás, resultando en el mismo estimado del coeficiente independiente del modelo lineal.

5. Se procede a hallar el vector X'y

$$X'y = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 4 \\ 3 \\ 10 \\ 12 \\ 14 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 76 \\ -2 \\ 28 \\ 18 \end{bmatrix}$$

6. Por último, multiplicando la matriz $(X'X)^{-1}$ y el vector X'y se obtiene el vector de coeficientes B_j.

$$(X'X)^{-1} \ * \ X'y \ = \ b_j$$

$$\begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 76 \\ -2 \\ 28 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 76/8 \\ -2/8 \\ 28/8 \\ 18/8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \boxed{b_0} \\ \leftarrow \boxed{b_1} \\ \leftarrow \boxed{b_2} \\ \leftarrow \boxed{b_3} \end{matrix}$$

La ecuación de regresión se expresa entonces así:

$$y = \frac{76}{8} + \frac{-2}{8} X_A + \frac{28}{8} X_B + \frac{18}{8} X_A X_B$$

Según la ecuación, el factor A es el que menos afecta la respuesta al variar. Al hacer el análisis mediante Anova, teniendo en cuenta un experimento de tipo factorial con 2 replicas se obtiene la siguiente respuesta:

Factorial Fit: respuesta versus a, b

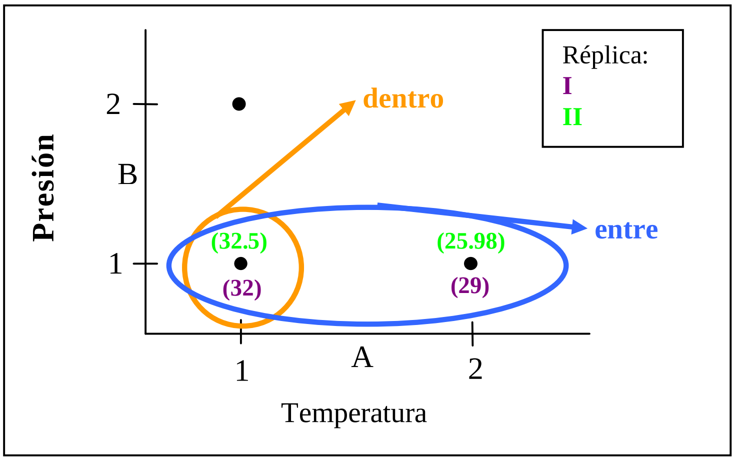
```
Estimated Effects and Coefficients for respuesta (coded units)

Term        Effect      Coef  SE Coef       T      P
Constant              9.5000   0.3953   24.03  0.000
a          -0.5000   -0.2500   0.3953   -0.63  0.561
b           7.0000    3.5000   0.3953    8.85  0.001
a*b         4.5000    2.2500   0.3953    5.69  0.005


S = 1.11803   R-Sq = 96.53%   R-Sq(adj) = 93.92%
```

En la respuesta se puede observar los mismos valores para los coeficientes que se obtuvieron mediante la regresión lineal. Al observar los valores de P para los factores, se encuentra que el factor A es no significativo debido a que 0.561 > 0.05, siendo 0.05 el nivel de significancia utilizado para la prueba. Por lo anterior se dice entonces que el factor A no es significativo, es decir, al variar sus niveles la respuesta no se impacta significativamente.

1. Diseño Factorial 2^k

El más importante de los casos especiales de los diseños factoriales es el que tiene k factores cada uno a dos niveles. Estos niveles pueden ser cuantitativos, valores de temperatura o presión, o pueden ser cualitativos, tales como 2 máquinas o dos operadores, o tal vez pueda ser la presencia o ausencia de un factor. Una réplica completa de tal diseño requiere $2 \times 2 \times 2 \times \cdot\cdot\cdot \times 2 = 2^k$ observaciones y se conoce como un ***diseño factorial*** $\boldsymbol{2^k}$.

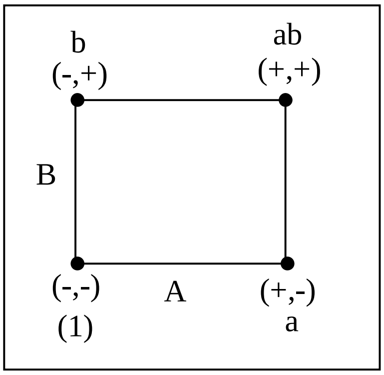
Como cada factor en el experimento tiene 2 niveles, los llamaremos nivel bajo (-) y nivel alto (+). El diseño más pequeño en este tipo de experimento es el que tiene k = 2 factores. Es importante realizar réplicas de cada tratamiento o combinación en el experimento ya que esto me permite comparar ***entre*** valores (datos obtenidos en los diferentes niveles de un factor fijando los demás factores) y ***dentro*** de valores (datos obtenidos de una misma combinación), para entender mejor lo antes establecido vea el ejemplo en l siguiente figura:



El número de corridas a realizarse en el experimento es 2k × # réplicas. Además, también es importante que el orden en que se realizan las corridas sea aleatorio, es por esto que el experimento es un experimento completamente aleatorio. Muchas veces resulta conveniente escribir la data en orden descendente de las combinaciones de los tratamientos. Esta forma de tabular se le conoce como el orden estándar y es como sigue:

A	B	Combinación de Tratamientos	Nomenclatura de Tratamientos
-	-	A low, B low	$a^0b^0 = (1)$
+	-	A high, B low	$a^1b^0 = a$
-	+	A low, B high	$a^0b^1 = b$
+	+	A high, B high	$a^1b^1 = ab$

Cuando el factor está en su nivel bajo su exponente es 0 y cuando el factor esta en su nivel alto su exponente es 1. Gráficamente esta nomenclatura es representada de la siguiente manera:

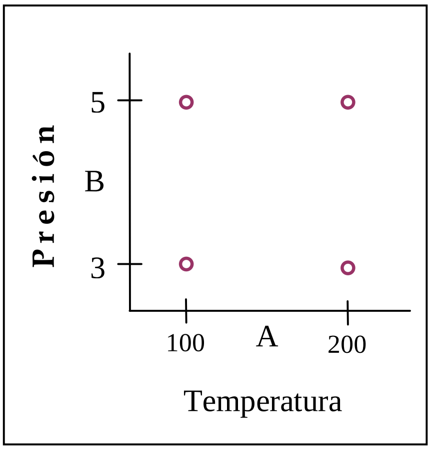


En un diseño factorial 2^k es fácil expresar los resultados del experimento en términos de un modelo de regresión. Aunque para este tipo de experimentos se pueden usar modelos de efectos como de promedios, el modelo de regresión es mucho más natural e intuitivo. La ecuación para un modelo de regresión sería:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$$

Ejemplo:

Se quiere medir el rendimiento de un químico midiendo la temperatura y la presión a la que está expuesto. Supongamos que de los datos obtenida los valores de la temperatura fluctúan entre 100°F y 200°F y los valores de la presión varían entre 3 y 5 Bars.



Supongamos la siguiente ecuación resultante del modelo de regresión:

No tiene una explicación, por lo tanto, no se puede decir que significa este intercepto.

$$\hat{y} = 50 + \underline{0.1}X_A + \underline{1}X_B$$

Para determinar cual de los dos factores tiene mas peso en el experimento no puedo fijarme en sus coeficientes, también debo ver su tabulación ya que el rango de valores de ambos factores es diferente.

De esta forma resulta muy difícil poder llegar a conclusiones asertivas, es por esto que para este tipo de experimento es necesario codificar las variables. La ecuación para codificar las variables (factores) es como sigue:

$$X_i = \frac{\in_i - \overline{\in}_i}{\frac{\text{rango}_i}{2}}, \qquad \text{donde} \qquad \begin{array}{l} X_i : \text{variable\_codificada} \\ \in_i : \text{variable\_natural} \\ \overline{\in}_i : \text{promedio\_variable\_natural} \end{array}$$

Codificando las variables del ejemplo anterior tenemos:

Variable Temperatura:

$$X_{100} = \frac{100-150}{100/2} = -1 \qquad\qquad X_{200} = \frac{200-150}{100/2} = +1$$

Variable Presión:

$$X_3 = \frac{3-4}{2/2} = -1 \qquad\qquad X_5 = \frac{5-4}{2/2} = +1$$

Supongamos que ahora con las variables codificadas la ecuación resultante del modelo de regresión es la siguiente:

$$\hat{y} = 30 + 0.2X_A + 1.3X_B$$

El valor de la constante, 30, es el valor de mi respuesta cuando X_i está en cero (cero es el centro de mi región experimental). Ahora tiene una explicación física porque los ceros están contenidos.

Ahora, ¿Cuál factor, X_A o X_B, tiene mayor peso en el experimento?

- X_B, porque como ahora los valores están codificados pues puedo utilizar el coeficiente para determinar cual factor tiene mayor peso.

Ahora veremos un ejemplo de ANOVA por regresión:

Data:

		A: *1*	A: *2*
B	*1*	**8** **9**	**4** **3**
B	*2*	**10** **12**	**14** **11**

$$y = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 4 \\ 3 \\ 10 \\ 12 \\ 14 \\ 11 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & -1 & -1 & +1 \\ 1 & -1 & -1 & +1 \\ 1 & +1 & -1 & -1 \\ 1 & +1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & +1 & -1 \\ 1 & -1 & +1 & -1 \\ 1 & +1 & +1 & +1 \\ 1 & +1 & +1 & +1 \end{bmatrix}$$

X⟶ debe tener una columna por cada coeficiente a estimar y una fila por cada dato en el experimento.

$$y = b_0 + b_1 X_A + b_2 X_B + b_3 X_A X_B + \varepsilon$$

$$\hat{b} = (X'X)^{-1} X'Y$$

Resolviendo por partes:

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & +1 \\ 1 & -1 & -1 & +1 \\ 1 & +1 & -1 & -1 \\ 1 & +1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & +1 & -1 \\ 1 & -1 & +1 & -1 \\ 1 & +1 & +1 & +1 \\ 1 & +1 & +1 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

El codificar me permite entender el modelo y me da una propiedad muy útiles el las matrices.

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix}$$

$$(X'Y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +! & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 4 \\ 3 \\ 10 \\ 12 \\ 14 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 76 \\ 37-39=-2 \\ 52-24=28 \\ 47-29=18 \end{bmatrix}$$

$$\hat{b} = (X'X)^{-1}(X'Y) = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 76 \\ -2 \\ 28 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 76/8 \\ -2/8 \\ 28/8 \\ 18/8 \end{bmatrix}$$

Si estimamos cuando A = -1 y B = -1 tenemos:

$$y = \frac{76}{8} - \frac{2}{8}X_A + \frac{28}{8}X_B + \frac{18}{8}X_A X_B$$

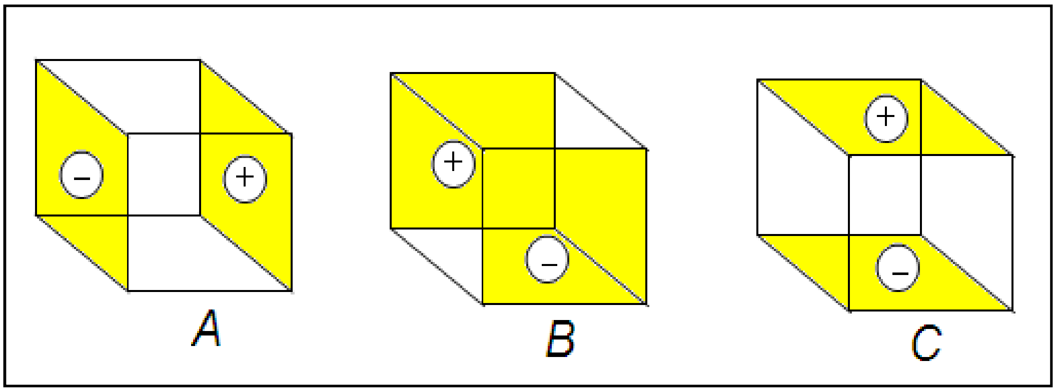
$$= \frac{76}{8} - \frac{2}{8}(-1) + \frac{28}{8}(-1) + \frac{18}{8}(-1)(-1)$$

$$= \frac{76}{8} + \frac{2}{8} - \frac{28}{8} + \frac{18}{8} = \frac{68}{8} = 8.5$$

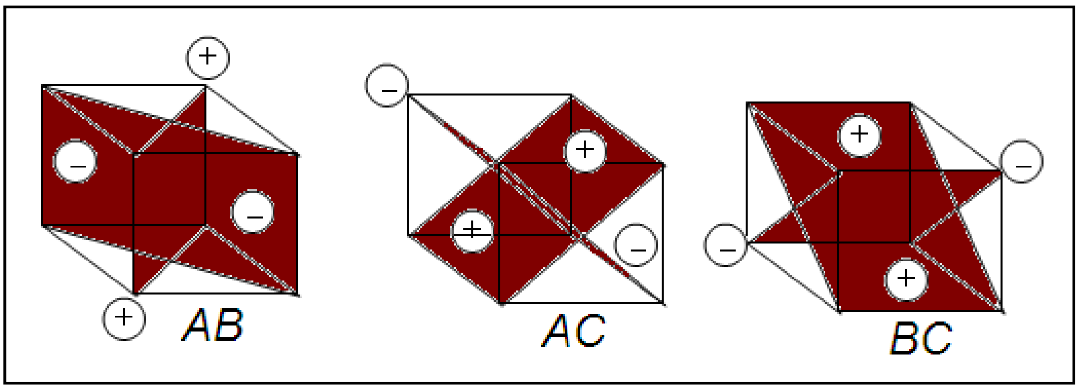
Ahora, si A = 1 y B = 1, tenemos:

$$y = \frac{76}{8} - \frac{2}{8}(1) + \frac{28}{8}(1) + \frac{18}{8}(1)(1) = \frac{120}{8} = 15$$

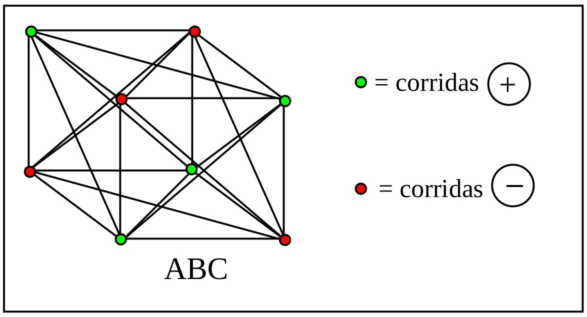
Regresión me das más información ya que me dice quien impacta y cual es la dirección. Una forma de visualizar el efecto de los factores y sus interacciones es utilizando cubos. Para un experimento de 3 factores podemos visualizar los efectos principales en la siguiente figura donde uno de los factores está en su nivel alto y los otros dos están en su nivel bajo:



De igual manera podemos visualizar la interacción de los factores. La siguiente figura ilustra la interacción cuando dos de los factores están en su nivel alto y uno esta en su nivel bajo.



Si todos los factores en el experimento están en su nivel alto, su representación grafica es como se muestra a continuación:

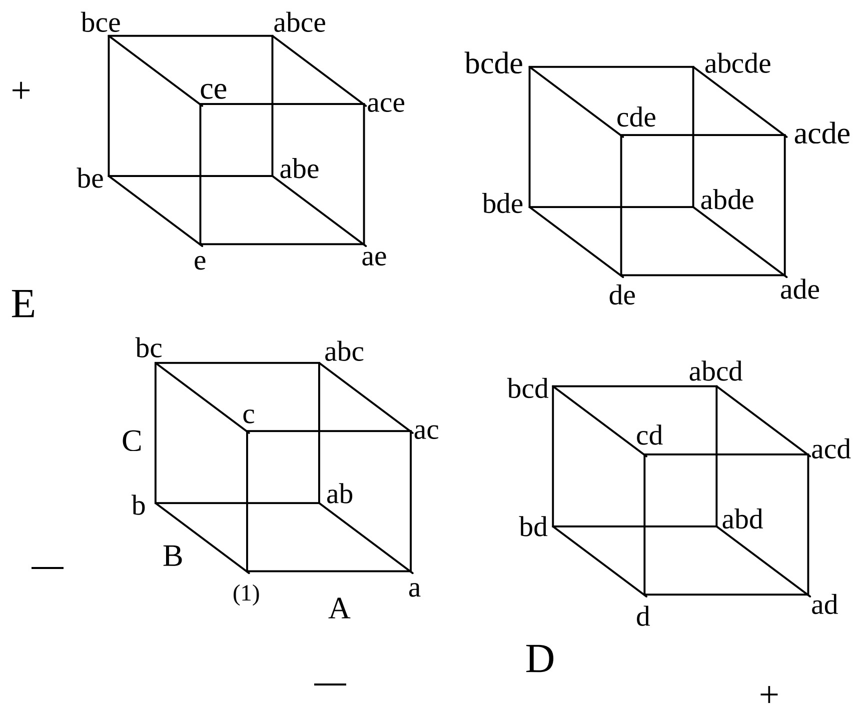


Si tenemos un experimento con 5 factores el número de posibles combinaciones es 32. Los efectos principales son los 5 factores, cuando uno de ellos está en su nivel alto y el resto en su nivel bajo, dándonos un total de 5 combinaciones (A, B, C, D, y E). Cuando realizamos las interacciones tenemos la combinación de 2 factores en su nivel alto y 3 factores en su nivel bajo, 3 factores en su nivel alto y 2 factores en su nivel bajo, 4 factores en su nivel alto y 1 factor en su nivel alto y, por último, todos los factores en su nivel alto. Estas posibles interacciones se muestran a continuación:

$$Interaccion\_2 = \begin{matrix} AB & BC & CD & DE \\ AC & BD & CE & \\ AD & BE & & \\ AE & & & \end{matrix} \qquad Interaccion\_3 = \begin{matrix} ABC & ACD & BCD & CDE \\ ABD & ACE & BCE & \\ ABE & ADE & BDE & \end{matrix}$$

$$Interaccion\_4 = \begin{matrix} ABCD & BCDE \\ ABCE & \\ ABDE & \\ ACDE & \end{matrix} \qquad Interaccion\_5 = ABCDE$$

Todas estas interacciones gráficamente representadas se verían como sigue:



A medida que aumenta el número de factores en el experimento, realizar las calculaciones de cada una de las combinaciones resultantes se vuelve complicado y tedioso, además que se dificulta visualizar la interacción de los factores de forma grafica. Si aumentamos el número de factores, el numero de combinaciones o tratamientos a realizar aumente y esto es sin tomar en cuenta el número de corridas que debemos realizar para tener réplicas. Cuando un experimento de 2^k envuelve muchos factores es económicamente difícil poder realizar replicas, por esto, si uno o más de los factores es irrelevantes se puede imponer cuadros o caras sobre cuadros o caras (trasladándolos) permitiendo así las réplicas.

Algo muy importante que hay que tener en cuenta es que cuando no hay replicas no tenemos estimado de error. Para esta situación, Daniels sugiere trazar los estimados de los efectos en una grafica de probabilidad normal. De esta forma los efectos no significativos estarán normalmente distribuidos, con promedio cero (0) y varianza σ^2 y además van a estar alineados formando una línea recta en la gráfica. Los factores que sean significativos van a tener una distribución con promedio distinto de cero y se alejaran de la línea formada por los no significativos. Esta línea se le conoce como el Trazo Normal de los efectos (Trazo de Daniels). Este método nos ayuda a distinguir aquellos efectos que sobresalen para explicar la respuesta. Este método parte de la premisa de que cuando k es lo suficientemente grande, todas las fuentes de variación no serán relevantes; algunas de ellas deben pertenecer al error o ruido.

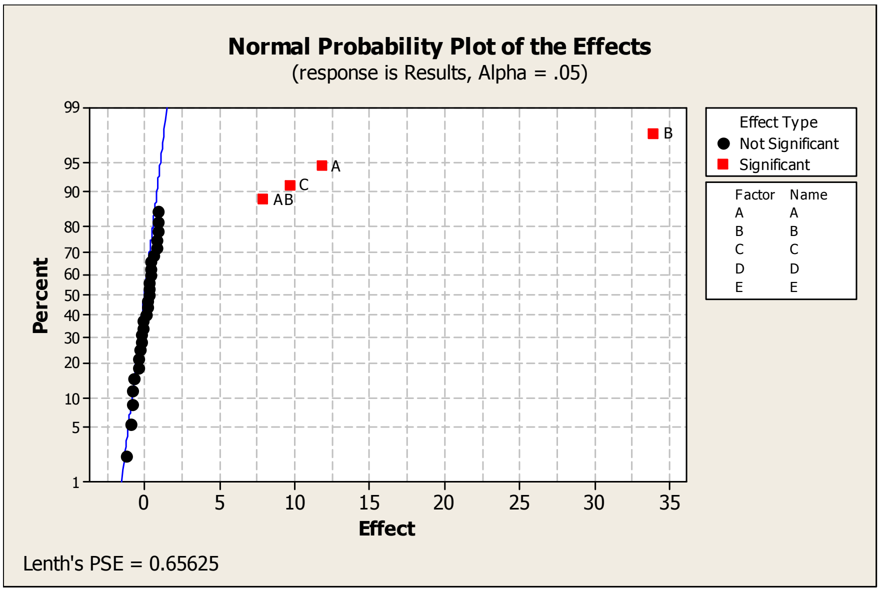
Ejemplo usando MINITAB:

Se realizó un experimento en una planta donde fabrican semiconductores en un esfuerzo por mejorar el rendimiento. Cinco factores, cada uno a dos niveles, se estudiaron. Se hizo una corrida del diseño sin réplicas y se muestra a continuación:

(1) = 7	d = 8	e = 8	de = 6
a = 9	ad = 10	ae =12	ade = 10
b = 34	bd = 32	be = 35	bde = 30
ab = 55	abd = 50	abe =52	abde = 53
c = 16	cd = 18	ce = 15	cde =15
ac = 20	acd = 21	ace = 22	acde = 20
bc = 40	bcd = 44	bce = 45	bcde = 41
abc = 60	abcd =61	abce = 65	abcde = 63

**Para realizar los pasos en MINITAB refiérase al manual de MINITAB provisto.

(a) Construya la grafica de probabilidad normal de los efectos estimados (Trazo de Daniels). ¿Cuáles efectos aparecen muy alejados?



En esta gráfica podemos notar que los factores significativos para este experimento son A, B, C y la interacción AB.

(b) Realice un análisis de varianza para confirmar sus descubrimientos en la parte (a).

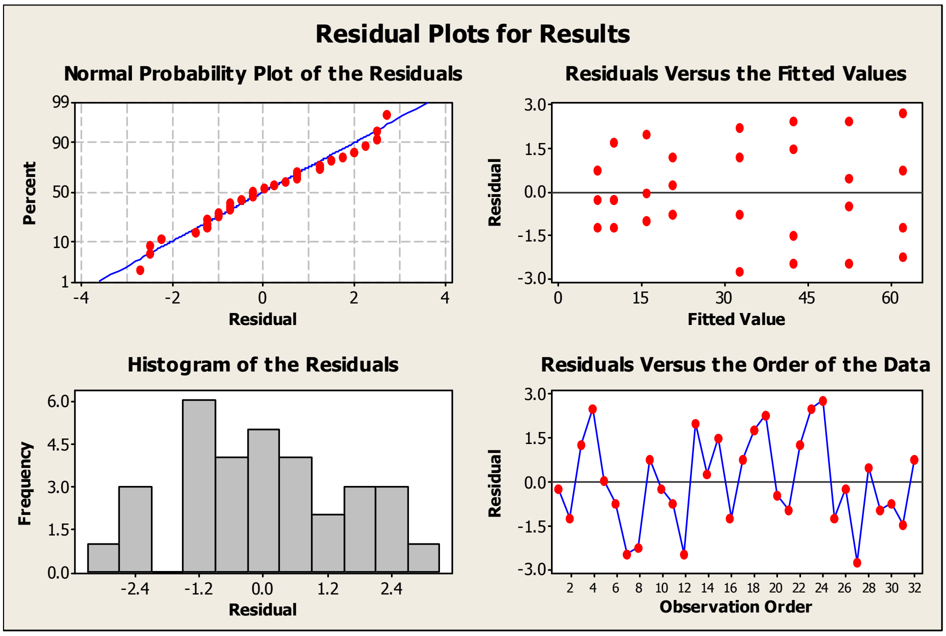
```
Analysis of Variance for Results (coded units)

Source              DF   Seq SS   Adj SS   Adj MS  F  P
Main Effects         5  11087.9  11087.9  2217.58  *  *
2-Way Interactions  10    536.3    536.3    53.63  *  *
3-Way Interactions  10     24.3     24.3     2.43  *  *
4-Way Interactions   5     15.2     15.2     3.03  *  *
5-Way Interactions   1      0.3      0.3     0.28  *  *
Residual Error       0        *        *        *
Total               31  11664.0
```

Como podemos apreciar los residuales del error aparecen con un asterisco, esto se debe a que en un experimento sin réplicas no se puede estimar el error. También podemos notar que los valores de la distribución F y el P-value de los efectos y las interacciones, todas tiene asterisco y es debido a que no se pueden estimar cuando el error es igual a cero (0) o no se ha podido estimar.

(c) Escriba el modelo de regresión relacionando el rendimiento con las variables significativas del proceso.

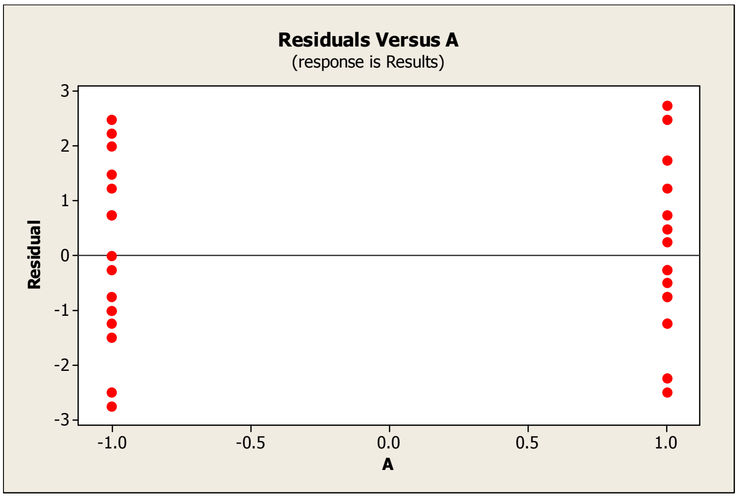
$$\hat{Y} = 30.5313 + 5.9063X_A + 16.9687X_B + 4.8438X_C + 3.9688X_{AB}$$

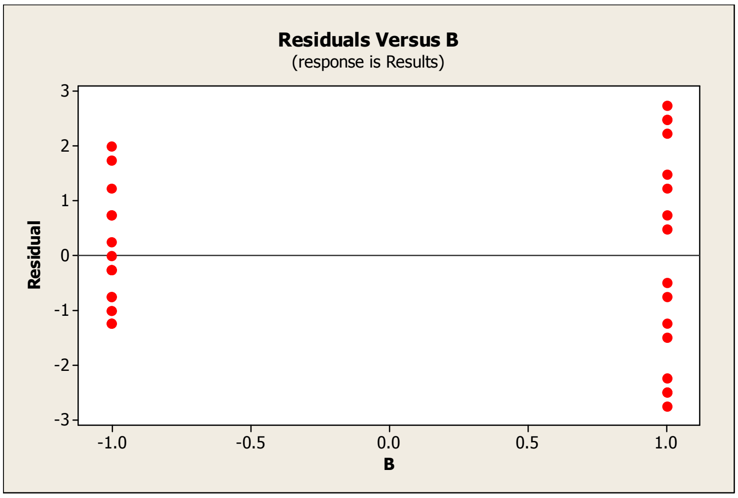
(d) Grafique los residuales en una grafica de probabilidad normal. ¿Es satisfactoria la grafica resultante?

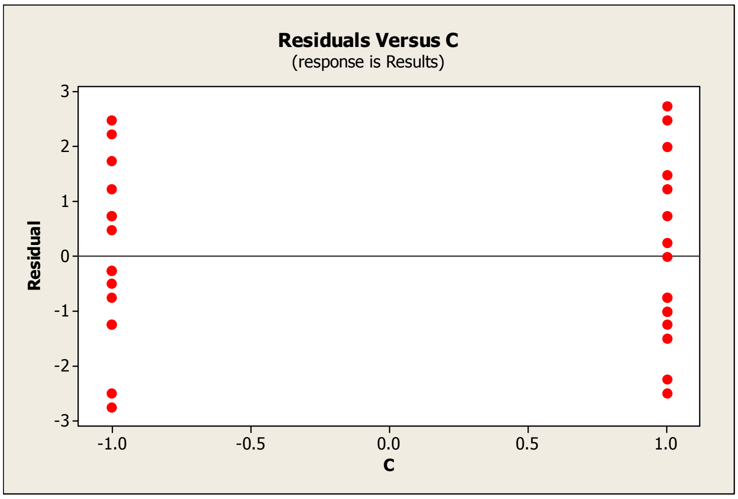


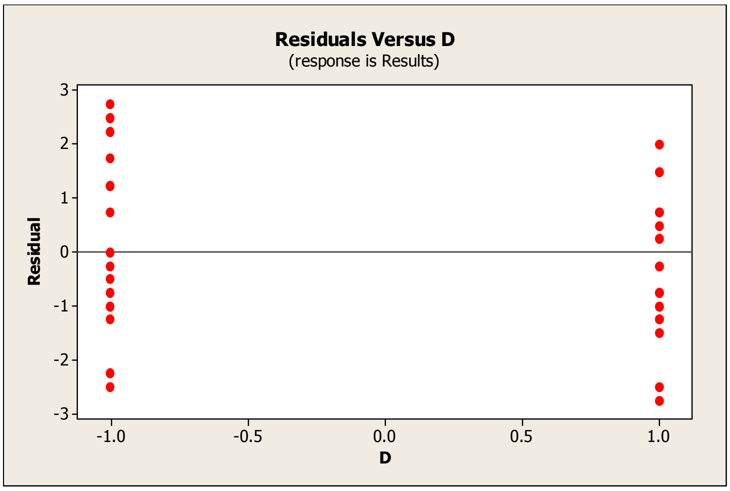
Como podemos ver los residuales están distribuidos a través de la línea de normalidad y el histograma tiene una forma de campana mostrando que los promedios son iguales a cero (0)

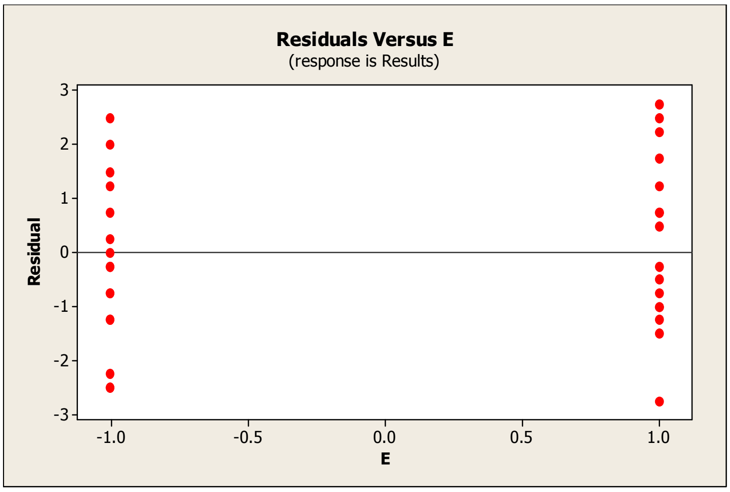
(e) Grafique los residuales versus el rendimiento predicho y versus cada uno de los factores. Comente sobre las graficas resultantes.


Residuals Versus A
(response is Results)
Residual
3
2
1
0
-1
-2
-3
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0
A


Residuals Versus B
(response is Results)
Residual
3
2
1
0
-1
-2
-3
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0
B


Residuals Versus C
(response is Results)
Residual
3
2
1
0
-1
-2
-3
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0
C

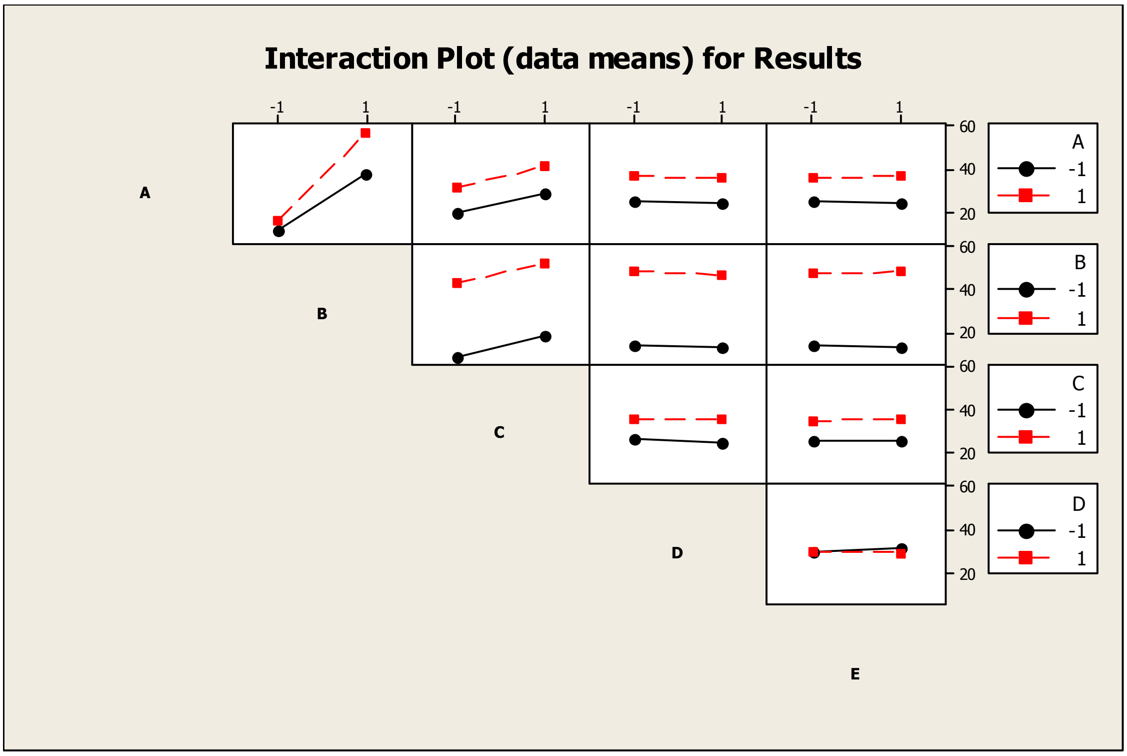




Como podemos ver en cada una de las graficas resultantes los residuales están entre los valores de -1 y +1 indicándonos que nuestro modelo es razonable.

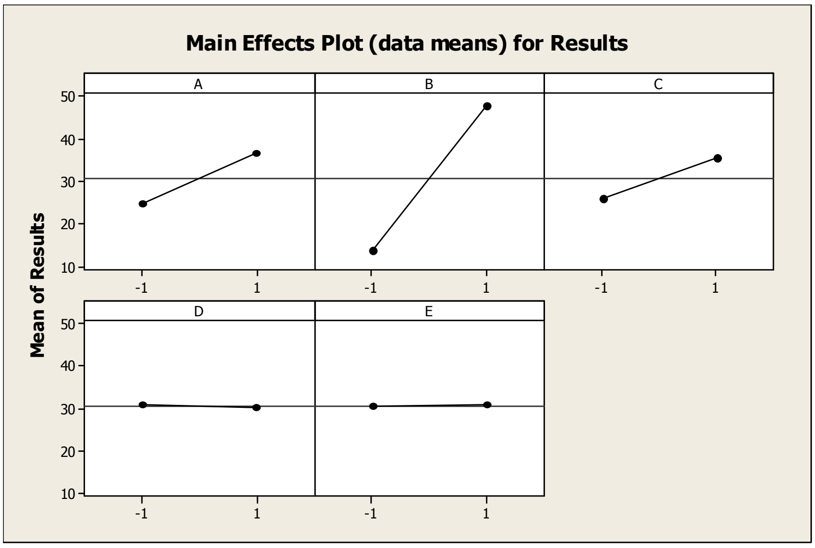
(f) Interprete cualquier interacción significante.

Según la gráfica de probabilidad normal la única interacción significante en este experimento es la AB.



(g) ¿Cuáles son sus recomendaciones con respecto a las condiciones en que opera el proceso?

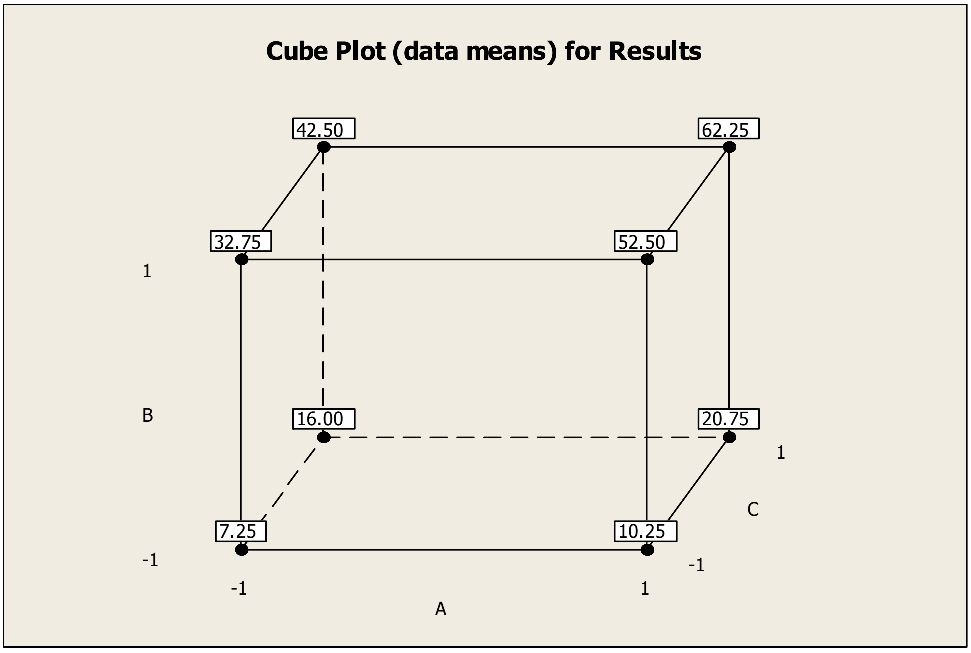
Eliminar los factores D y E y realizar más replicas con los factores que resultaron significativos para poder tener un análisis comparativo. Entiendo que si no son significativos pueden ser eliminados del experimento. Esto se puede probar con la gráfica del "main effect".



(h) Proyecte el diseño 2^5 en un problema 2^k tomando en cuenta los factores importantes o significativos.

Factorial Fit: Results versus A, B, C

```
Estimated Effects and Coefficients for Results (coded
units)
Term      Effect    Coef  SE Coef       T      P
Constant          30.531   0.3021  101.07  0.000
A         11.813   5.906   0.3021   19.55  0.000
B         33.937  16.969   0.3021   56.17  0.000
C          9.688   4.844   0.3021   16.03  0.000
A*B        7.938   3.969   0.3021   13.14  0.000


S = 1.70884   R-Sq = 99.32%   R-Sq(adj) = 99.22%
```



1. Diseño Factorial 2^k con bloques

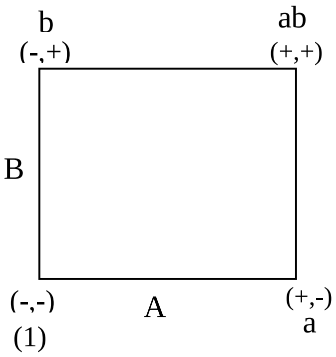
Existen muchas situaciones en las cuales no es posible efectuar todos los tratamientos del experimento factorial bajo las mismas condiciones. En este caso usted puede considerar uno o varios factores como fuentes a ser bloqueadas. Un ejemplo de factores a ser bloqueados pueden ser lotes de materiales, operadores, etc.

En los experimentos de diseño factorial 2^k vimos la importancia de codificar las variables. Codificamos presumiendo que los factores son de naturaleza continua. Ejemplo: entre el -1 y +1 existe el 0, pero entre Máquina 1 y Máquina 2 no hay nada central. Cuando tengo factores de naturaleza discreta los puntos centrales se duplican aumentando así los costos experimentales.

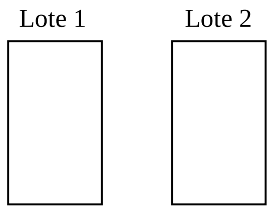
Como todas las combinaciones o tratamientos en un experimento 2^k no pueden realizarse bajo las mismas condiciones, tenemos que asignar un subconjunto de los tratamientos a cierto nivel de una fuente de ruido que queremos bloquear. Esto lo conocemos como la técnica de ***Fundir***, donde el tamaño del bloque es más pequeño que el número de tratamientos en una réplica. Por ahora vamos a considerar experimentos 2^k contenidos en 2^p bloques, donde $p < k$. En esta estructura solo será posible construir experimentos con un número de bloques equivalentes a una potencia de 2, o sea, 2 bloques ($p = 1$), 4 bloques ($p = 2$), 8 bloques ($p = 3$) y así sucesivamente.

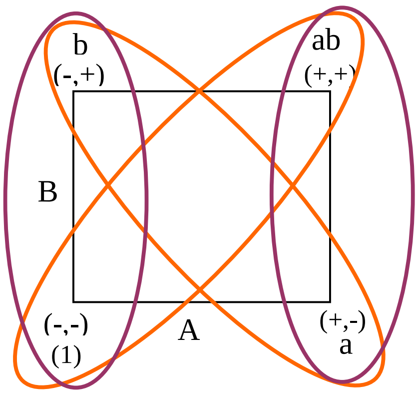
Supongamos que se va a realizar un experimento con dos factores cada uno a dos niveles. En el siguiente ejemplo vamos a mostrar dos escenarios con dos distintas notaciones para identificar los tratamientos de este experimento. Si suponemos que un tratamiento toma cierto número de horas lo que resulta en obtener solo dos observaciones cada día, entonces tenemos que preguntarnos que tratamientos ejecutaremos cada día. Una vez contestada esta pregunta, dicha contestación va a determinar la fuente o las fuentes de variación que se van a fundir con el efecto bloque.

Ejemplo de Experimento más pequeño 2^2:

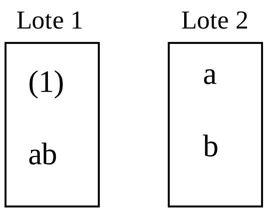


Tenemos 2 Lotes:

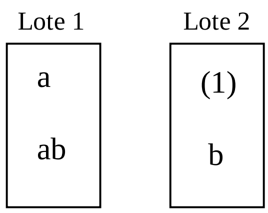




Escenario 1



Escenario 2



En el escenario 1, al seleccionar la diagonal, la misma corresponde a la intersección, por lo tanto, estamos fundiendo el lote con la intersección. Sin embargo, en el escenario 2, el lote esta fundido con el factor A. El lote 1 del escenario 2 tiene los tratamientos cuando el factor A esta en su nivel alto, y el lote 2 tiene los tratamientos cuando el factor A esta en su nivel bajo, por lo tanto, las fuentes bloques y el factor A se encuentran fundidos. La asignación del escenario 2 es una muy pobre ya que sacrifico la información de un efecto principal.

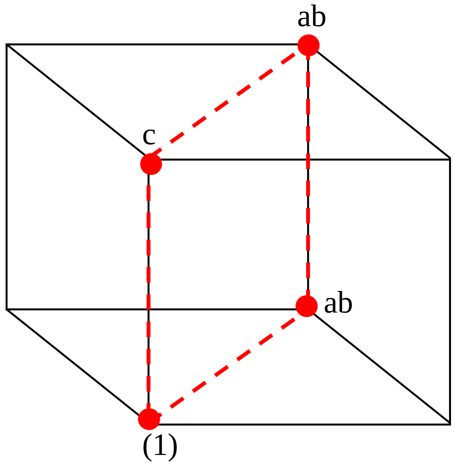
Los contrastes ortogonales serían:

Tratamiento	A	B	AB
	Contrastes Ortogonales		
(1)	-	-	+
a	+	-	-
b	-	+	-
ab	+	+	+

Establecemos un dogma en el que si voy a fundir (o tengo que fundir) algo, o sea, perder información, entonces seleccionamos aquella interacción que tenga el mayor número de factores contenidos.

En un diseño 2^3 en bloque, tenemos un experimento con 8 tratamientos y un bloque. En este experimento, seleccionar los tratamientos que componen las caras del cubo para fundir un bloque, no son una buena selecciona ya que estaría fundiendo los efectos principales y no cumpliríamos con el dogma. Ahora, vamos a ver que sucede al hacer las siguientes selecciones:

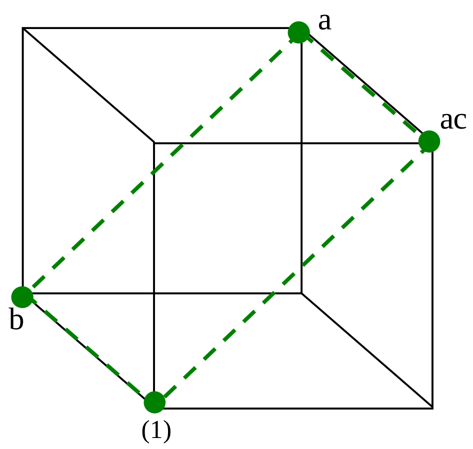
1)



Tratamientos	A	B	AB
(1)	-	-	+
Ab	+	+	+
C	-	-	+
Abc	+	+	+

Al seleccionar estos tratamientos para el bloque podemos ve que se construye una cara que me divide la cara de A con B. También cómo podemos apreciar los signos de ambos factores son exactamente igual indicando que hay una relación y que el lote esta fundido con AB. Por lo tanto, esta no es una buena selección.

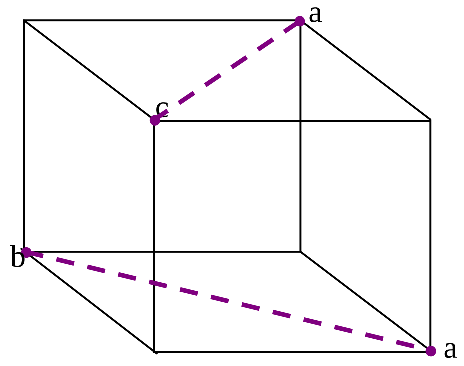
2)



Tratamiento	A	C	AC
(1)	-	-	+
B	+	+	+
Ac	-	-	+
Abc	+	+	+

En este caso podemos apreciar que la selección de estos tratamientos me forman una cara que me divide las caras de A y de C, por lo tanto el lote esta fundido con AC. Nos podemos dar cuenta de esto por los signos de los factores indicando que entre ellos hay relación.

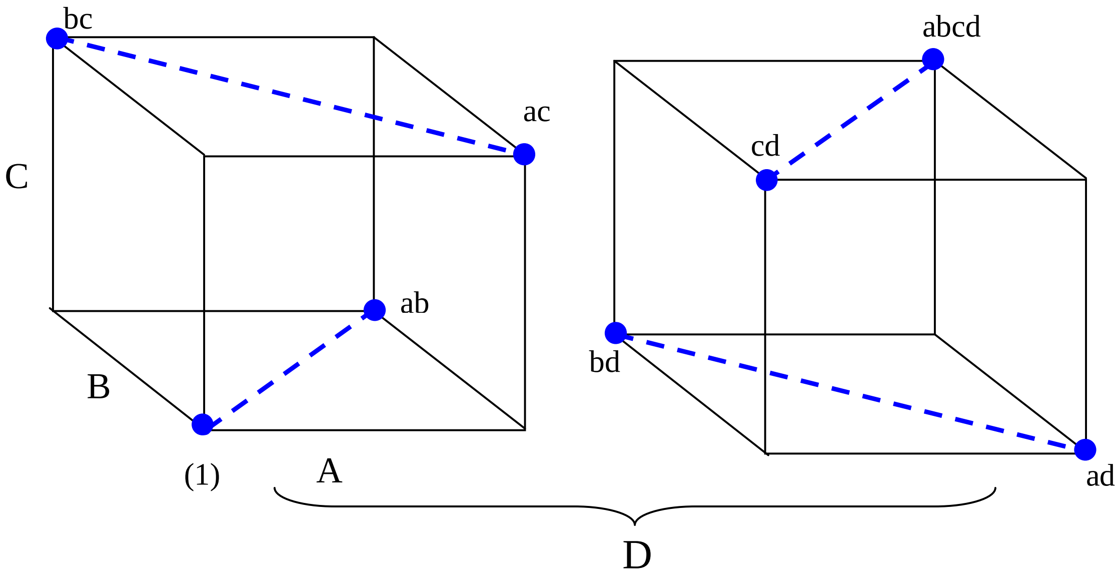
3)



Tratamiento	A	B	C	ABC
A	+	-	-	+
B	-	+	-	+
C	-	-	+	+
Abc	+	+	+	+

Para este caso podemos notar que se forman dos líneas que cruzan la cara de A y B pero en diferentes direcciones de C. De esta forma no se generan nuevas caras y tampoco se funden los efectos principales, lo que lo hace factibles. Además, podemos ver que se cumple el dogma de fundir la interacción que contiene mayor factores. La práctica común cuando se realizan este tipo de experimento es la de fundir con los bloques aquellos efectos de las interacciones que mayor factores contenga.

Ahora, en un experimento 2^4 en bloque, tenemos un experimento con 16 tratamientos y dos bloques. Nuevamente tenemos que asegurarnos de no seleccionar aquellos tratamientos que formen las caras de los cubos para no fundir los efectos principales, además, de evitar formar nuevas caras. Tomando esto en cuenta hacemos las siguientes selecciones:



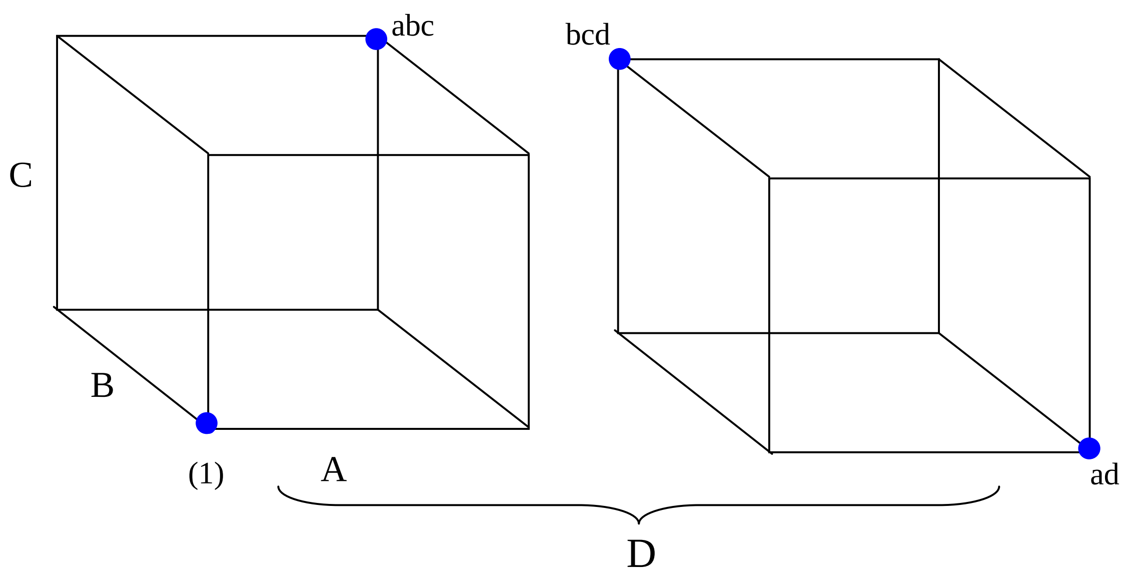
Como podemos apreciar, los tratamientos del primer cuadrado son la interacción ABC y el segundo cuadrado son la interacción ABC rotando en el factor D. Si nos fijamos en la tabla podemos notar que los signos de D y de la interacción ABC son iguales indicando que hay una relación entre ellos.

Tratamientos	A	B	C	D	ABC
Lote 1					
bd	-	+	-	+	+
ad	+	-	-	+	+
cd	-	-	+	+	+
abcd	+	+	+	+	+
Lote 2					
(1)	-	-	-	-	-
ab	+	+	-	-	-
bc	-	+	+	-	-
ac	+	-	+	-	-

En experimentos 2^k todas las fuentes, tanto efectos principales como las interacciones, tienen un (1) grado de libertad, excepto el error. Si una fuente a bloquearse tiene 2 niveles, fundimos una fuente para contabilizar por ese grado de libertad.

Generalizando Factorial 2^k en 2^p bloques donde 2^p bloques es el número de niveles. En un factorial 2^4 en bloque tengo 4 niveles, el número de niveles podría ser, por ejemplo, el número de lotes. En este experimento tengo 16 tratamientos y 3 grados de libertad, lo que implica que de todas las fuentes que me pueden interesar, 3 de ellas se van a fundir. Ahora, ¿Cuáles tres? Aquí es donde está el reto.

Veamos un ejemplo de un factorial 2^4 con 16 tratamientos y 4 niveles. Se seleccionan 4 tratamientos de los cuales se deben encontrar los 3 efectos a ser fundidos.



Los efectos de este experimento por número de factores contenidos son:

A		ABC	
B	AB BC	ABD	
C	AC BD	ACD	
D	AD CD	BCD	ABCD
4	6	4	1

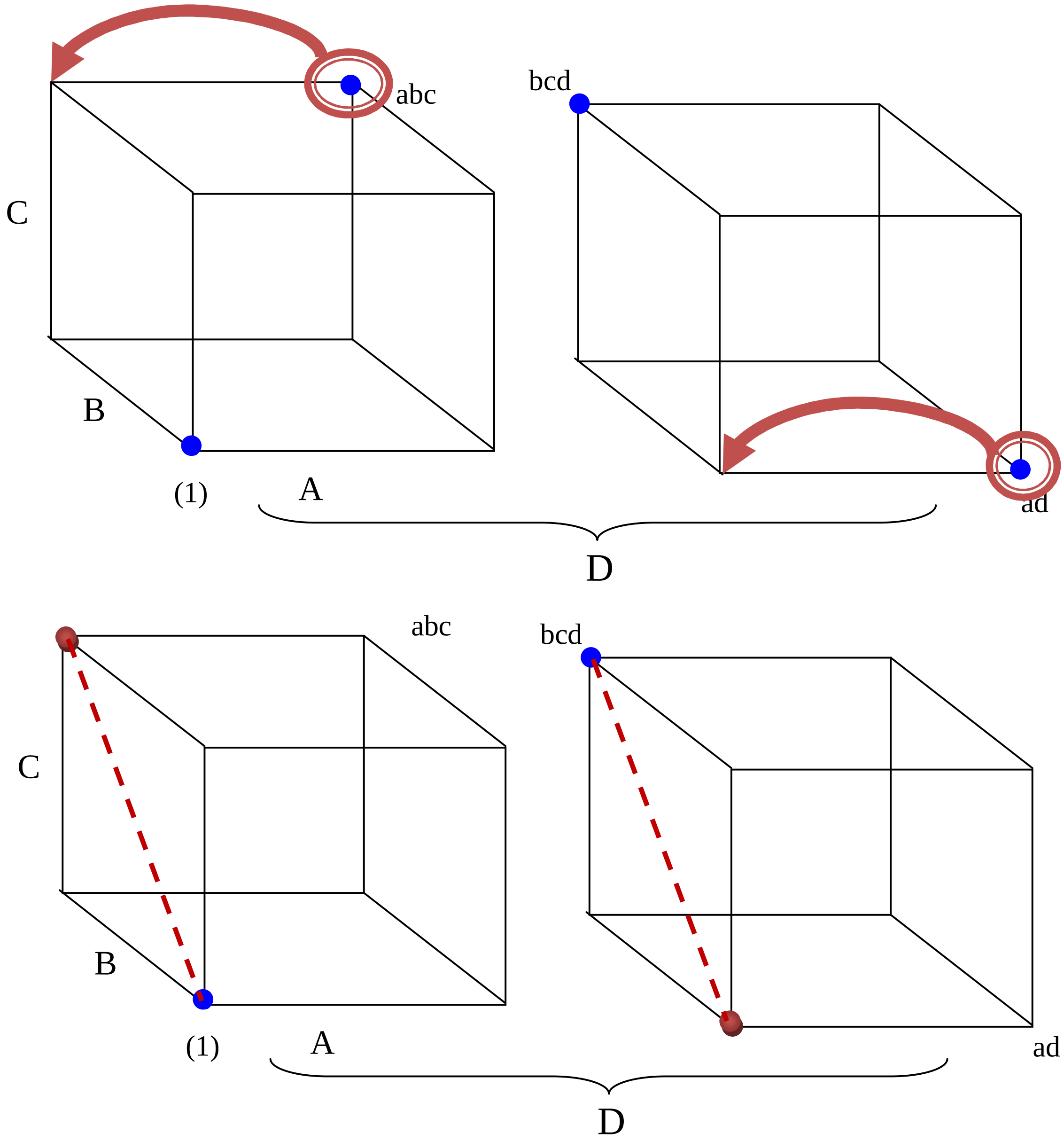
De estos 15 efectos, 3 deben tener el mismo signo en cada tratamiento, ya sea positivo (+) o negativo (-). Tabulando tenemos los siguientes resultados:

Tratamientos	*A*	*B*	*C*	*D*	*BC*	*ACD*	*ABD*
(1)	-	-	-	-	+	-	-
Abc	+	+	+	-	+	-	-
Bcd	-	+	+	+	+	-	-
Ad	+	-	-	+	+	-	-

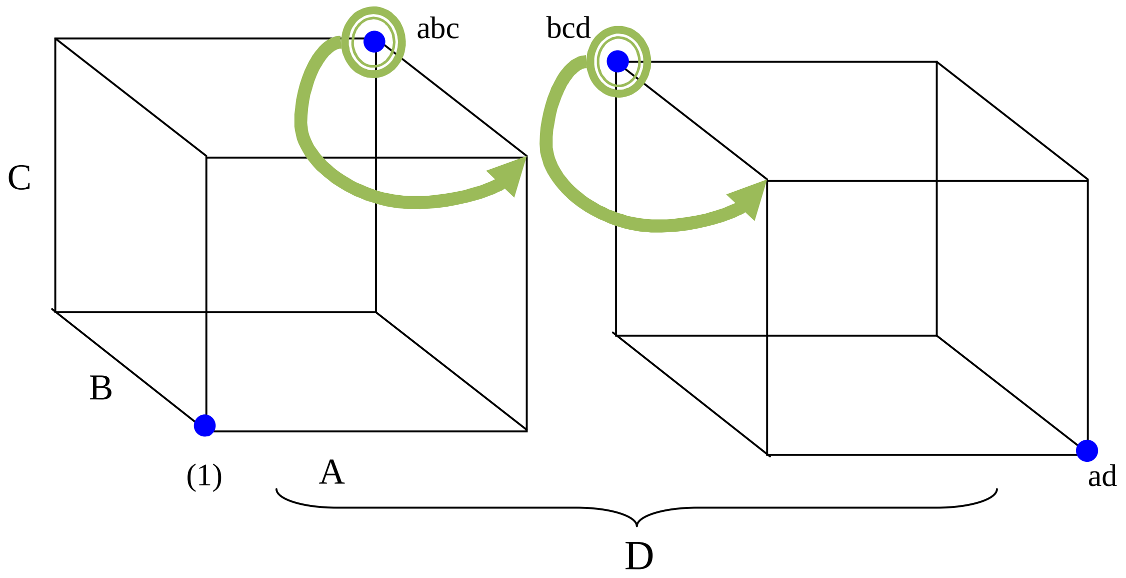
Las preguntas claves son: 1) ¿Cómo conseguimos los efectos a ser fundidos?, 2) ¿Qué pasó con el dogma?

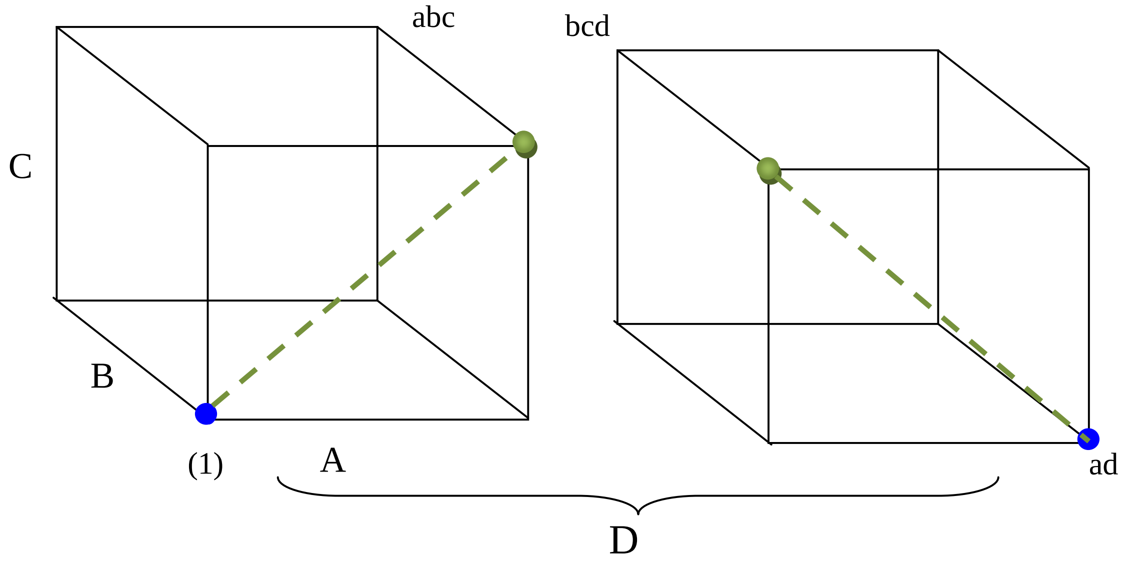
Contestando la pregunta uno, los efectos a ser fundido los conseguimos proyectando los tratamientos seleccionados uno a la vez, o sea, moviendo un factor a la vez ya sea de su nivel alto a su nivel bajo o viceversa.

Ilustrando como conseguimos los efectos en este ejemplo, para el primer efecto proyectamos el factor de A de su nivel alto a su nivel bajo quedándonos los 4 tratamientos fundidos en la interacción BC como se muestra a continuación.

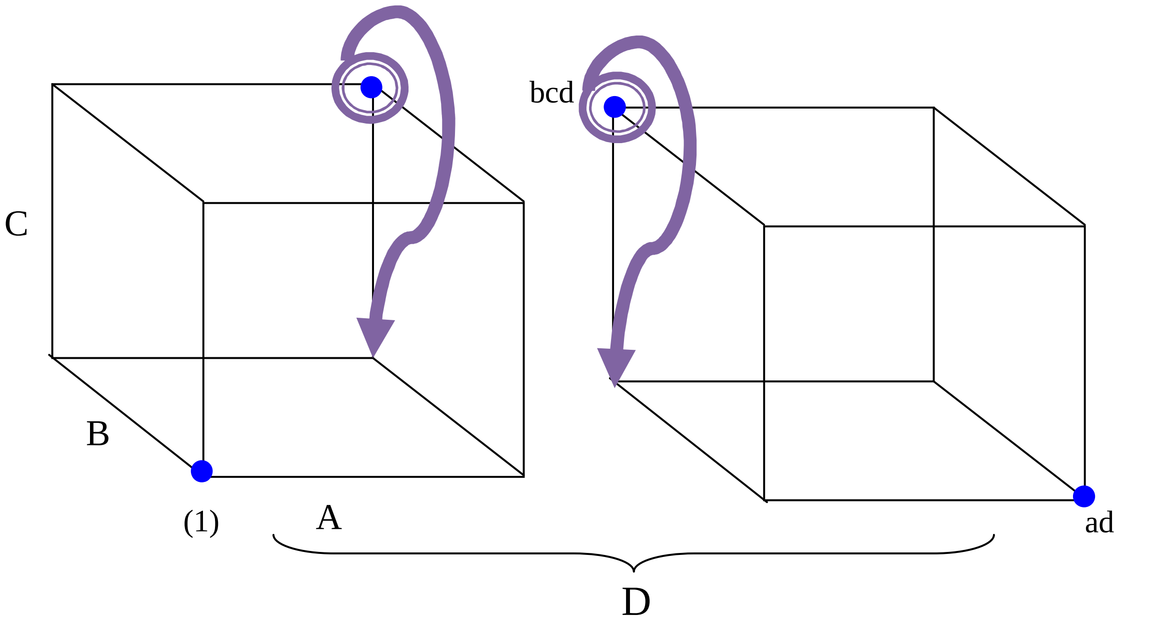


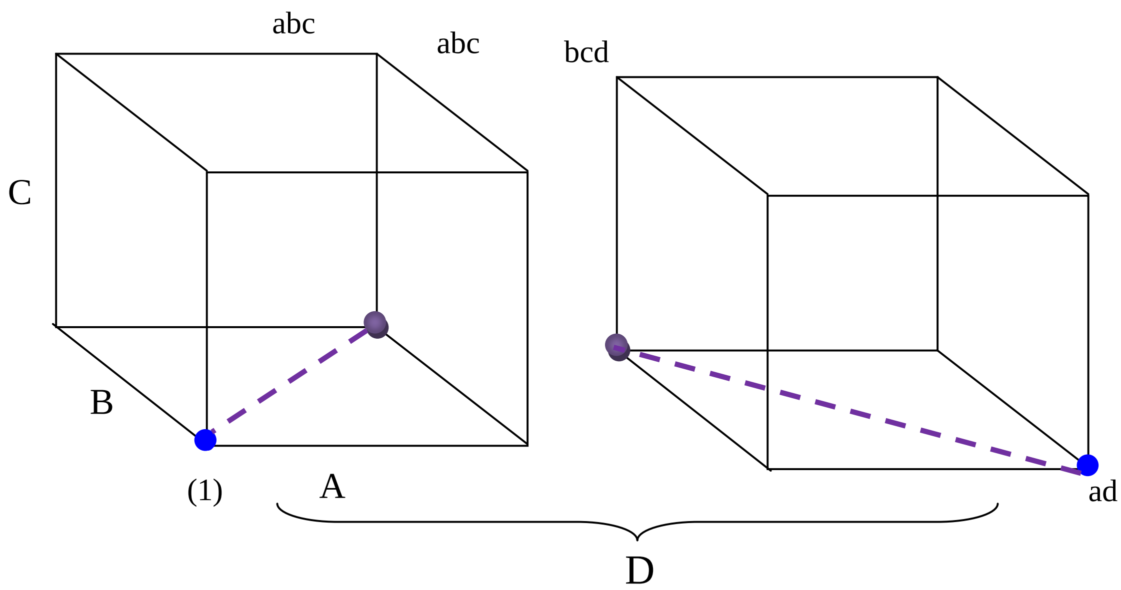
Ahora, buscando la interacción ACD procedemos a proyectar los puntos seleccionados en el factor B. Recuerde que para realizar la segunda proyección tengo que devolver los puntos a su posición original y luego vuelvo a proyectar. Tomando esto en cuenta, la interacción se encontraría así:





Por último, vamos a buscar la interacción ABD proyectando los puntos seleccionados originalmente sobre el factor C. Esto se obtiene como sigue:





Como ya sabemos este es un experimento 2^4 en bloques de 2^p donde 2^p es igual a 4, lo que implica que p=2. La variable p es el número de efectos fundidos o generadores independientes, o sea, en este experimento tenemos 2 generadores independientes. Sabemos que este experimento al ser de 4 niveles tiene 3 grados de libertad lo que implica que se tienen que fundir 3 efectos. Como podemos encontrar dos generadores independientes, el tercer factor se puede determinar en base de los dos generadores independientes encontrados. Del ejemplo anterior si ponemos al efecto BC y al efecto ACD como los generadores independientes, obtenemos el tercer generador como sigue:

$$g_3 = g_1 g_2 = (BC)(ACD) = ABC^2D = ABC^0D = ABD$$

Los exponentes pares son equivalentes a tener un exponente de grado 0 y los exponentes impares es equivalente a exponente de grado1. Ahora, si los generadores independientes son ACD y ABD, entonces el tercer generador seria:

$$g_3 = g_1 g_2 = (ACD)(ABD) = A^2BCD^2 = A^0BCD^0 = BC$$

Si volvemos a las preguntas formuladas anteriormente, nos falta por contestar que paso con el dogma de fundir aquellos efectos que más factores contenga. En este experimento el efecto con más factores es el ABCD. Si tomamos este efecto y un efecto que contenga 3 factores, como por ejemplo ABC, el tercer generador sería:

$$g_3 = g_1 g_2 = (ABCD)(ABC) = A^0B^0C^0D = D$$

Como podemos ver no es una buena selección ya que funde uno de los efectos principales. Ahora si en vez de tomar un efecto que contiene 3 factores, tomamos uno que contenga solo dos factores y mantenemos el efecto ABCD, el tercer generador sería:

$$g_3 = g_1 g_2 = (ABCD)(AB) = A^2B^2CD = A^0B^0CD = CD$$

Podemos notar que se funden dos efectos que contienen solo 2 factores, a diferencia de los efectos encontrados originalmente que dos de ellos contenían 3 factores y uno dos factores. Es por esto que fundir el efecto que más factores tiene a veces puede ser inapropiado ya que funde más efectos con menos factores contenidos.

Otro método de construir los bloques es el método de combinación lineal que utiliza la ecuación:

$$L = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k$$

Donde x_i es el nivel del factor *i* que aparece en un tratamiento en particular y α_i es el exponente que aparece en el factor i en el efecto a ser fundido. Cuando el factor está en su nivel bajo $x_i=0$ y $x_i=1$ cuando el factor está en su nivel alto. Esta ecuación se le conoce como ***definiendo el contraste***. Los tratamientos que producen el mismo valor de L (mod2) se colocaran en el mismo bloque. Debido a que los valores posibles de L (mod2) son 0 y 1, esto asignará los 2^k tratamientos a exactamente dos bloques. Usando el ejemplo anterior para el generador 1, ACD, tenemos:

$$L_1 = 1X_1 + 0X_2 + 1X_3 + 1X_4 = X_1 + X_3 + X_4$$

Hay que ir sobre los 16 tratamientos determinando que tratamientos van en que bloque. Hay que recordar que los números pares resultantes equivalen a 0 y los números impares equivalen a 1. Examinando los tratamientos tenemos:

$$\begin{aligned}
(1) &= 0+0+0=0 \\
a &= 1+0+0=1 \\
b &= 0+0+0=0 \\
c &= 0+1+0=1 \\
d &= 0+0+1=1
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
ab &= 1+0+0=1 \\
ac &= 1+1+0=2=0 \\
bc &= 0+1+0=1 \\
ad &= 1+0+1=2=0 \\
bd &= 0+0+1=1 \\
cd &= 0+1+1=2=0
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
abc &= 1+0+1=2=0 \\
acd &= 1+1+1=3=1 \\
bcd &= 0+1+1=2=0 \\
abd &= 1+0+1=2=0 \\
abcd &= 1+1+1=3=1
\end{aligned}$$

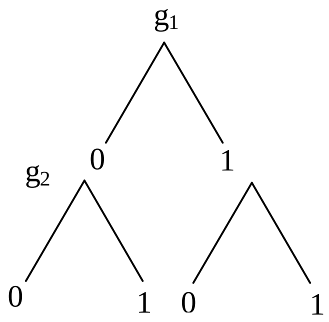
Me dividió los 16 tratamientos en 2 partes, los que son 0 y los que son 1. Ahora evaluamos para el generador 2, BC, y tenemos:

$$L = X_2 + X_3$$

Los tratamientos quedarían como sigue:

$$\begin{aligned}
(1) &= 0 \\
a &= 0 \\
b &= 1 \\
c &= 1 \\
d &= 0
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
ab &= 1 \\
ac &= 1 \\
ad &= 0 \\
bc &= 2=0 \\
bd &= 1 \\
cd &= 1
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
abc &= 2=0 \\
abd &= 1 \\
acd &= 1 \\
bcd &= 2=0 \\
abcd &= 2=0
\end{aligned}$$

Ahora para determinar cómo formar los bloques consideramos la siguiente figura:



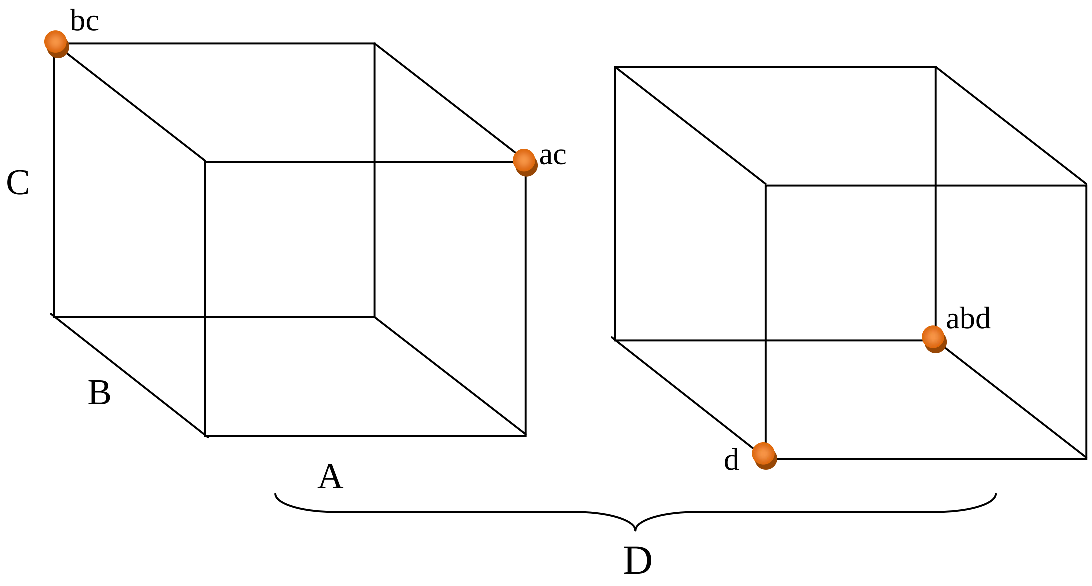
Ahora podemos agrupar los tratamientos en los diferentes bloques usando estas combinaciones lineales para estos dos generadores utilizados, por lo tanto, los bloques resultarían de la siguiente manera:

$L_1 = 0$ $L_2 = 0$	$L_1 = 0$ $L_2 = 1$	$L_1 = 1$ $L_2 = 0$	L1 = 1 L2 = 0
(1)	b	D	c
ad	ac	A	adc
bcd	cd	Bc	bd
abc	abd	Abcd	ab

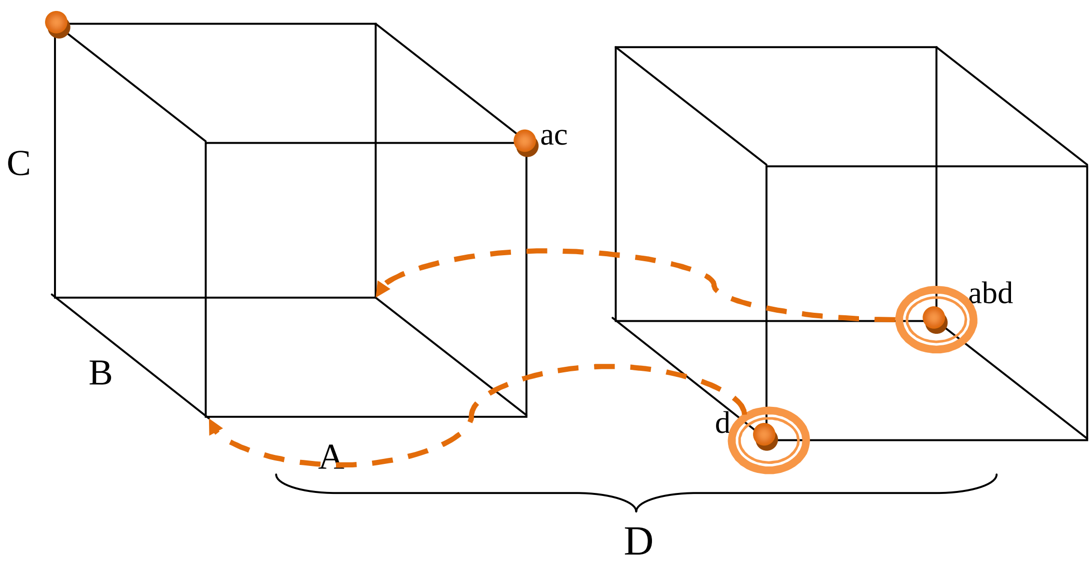
Este es el bloque principal.

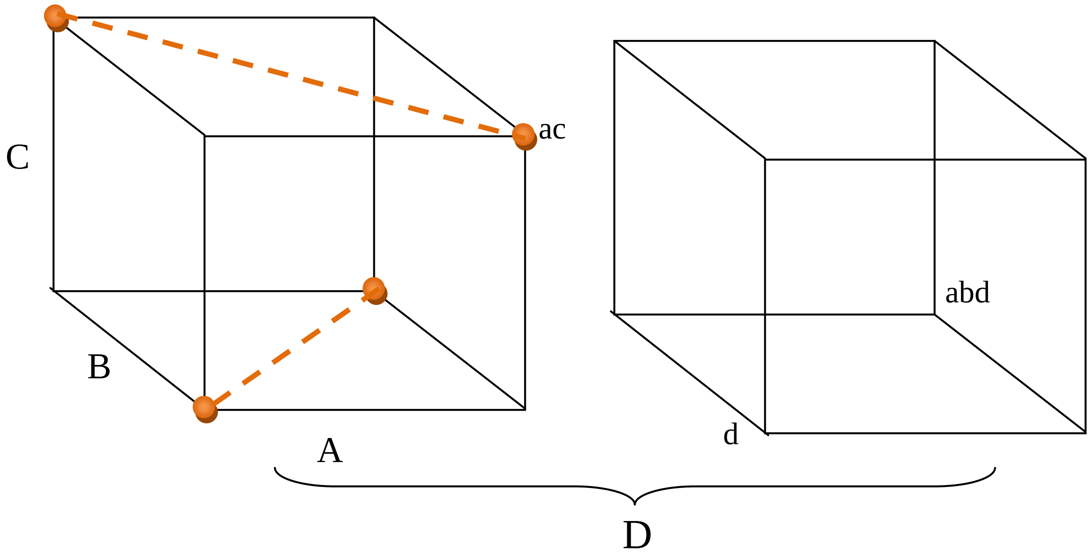
Otra forma de determinar los tratamientos que van en los diferentes bloques es que una vez se haya seleccionados los tratamientos iniciales para determinar los generadores, multiplicamos estos tratamientos por el factor por el que se proyectan los tratamientos cuando se están buscando los generadores. Ejemplo: si el bloque principal es multiplicado por el factor B como resultado tenemos el segundo bloque que está en la figura anterior. En otras palabras, si multiplicamos el bloque principal por el factor que no está contenido os resulta en los bloques faltantes.

Como forma de repaso vamos a realizar un ejemplo adicional de un experimento 2^4 en bloques tomando 4 tratamientos diferentes. El ejemplo es como sigue:



Determinamos los generadores proyectando. Si proyectamos en D tenemos lo siguiente:

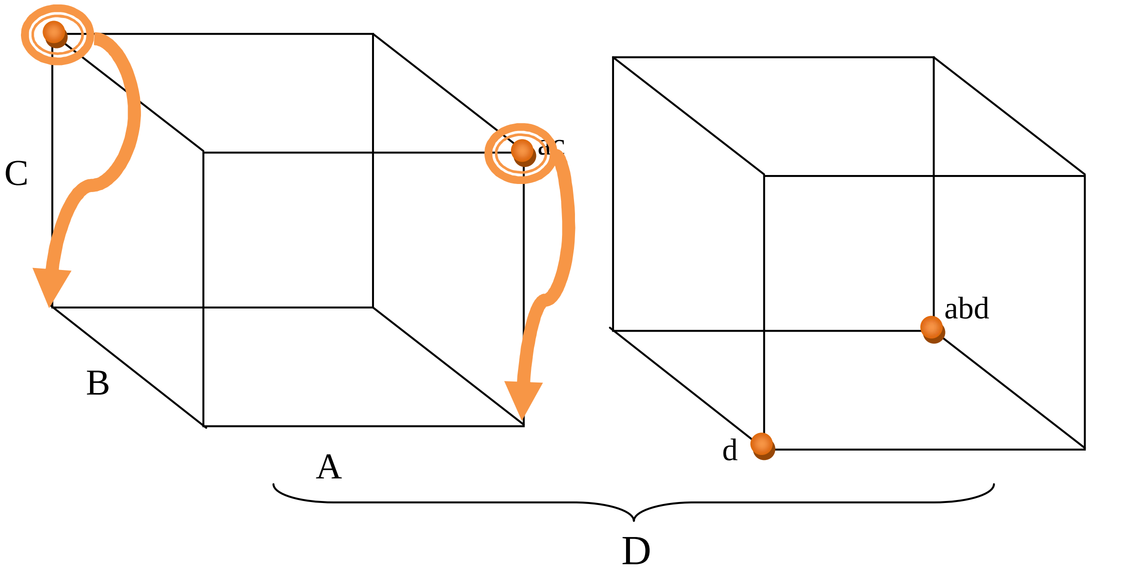


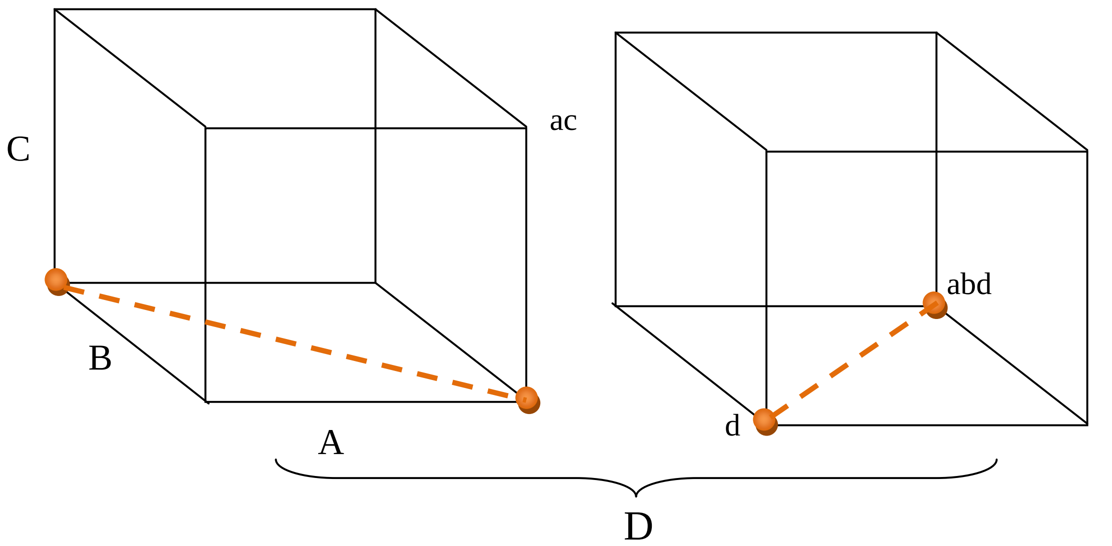


El generador resultante es el siguiente:

Tratamiento	*A*	*B*	*C*	*ABC*
Bc	-	+	+	-
Ac	+	-	+	-
D	-	-	-	-
Abd	+	+	-	-

Ahora, buscando el segundo generador proyectamos en C y tenemos lo siguiente:


C
B
A
abd
d
D


C
ac
B
A
abd
d
D

El generador resultante es:

Tratamiento	*A*	*B*	*D*	*ABD*
Bc	-	+	-	+
Ac	+	-	-	+
D	-	-	+	+
Abd	+	+	+	+

Ahora, buscando el tercer generador tenemos:

$(ABC)(ABD) = A^2B^2CD = CD$

Si $L_1 = X_1 + X_2 + X_3$ y $L_2 = X_1 + X_2 + X_4$, entonces cuando $L_1 = 0$ y $L_2 = 0$ el bloque resultante es el bloque principal que es el que sigue:

(1)
ab
bcd
acd

Si aplicamos la técnica de multiplicar el bloque principal por el factor que no está contenido tenemos lo siguiente:

(1)	*c		C		(1)	*b		b
ab	*c	→	A		ab	*b	→	a
bcd	*c		Cd		bcd	*b		cd
acd	*c		abcd		acd	*b		abcd

Una sugerencia, para concluir con los diseños de experimentos factoriales 2^k en bloques cuando se realizan réplicas, es que podemos fundir cada réplica con una fuente distinta. Esta técnica se le conoce como la Fundición Parcial de Réplicas y se vería representado como se muestra a continuación:

Réplica I		Réplica II	
(1)	a	(1)	a
ab	b	Ab	b
ac	c	Ac	c
bc	abc	Bc	abc
Bloque y/o ABC		Bloque y/o AB	

Ejemplo utilizando MINITAB:

Considere los datos que se muestran en la siguiente tabla. Suponga que es necesario correr el diseño en cuatro bloques con ACDE y BCD (y consecuentemente ABE) fundidos. Analice los datos de este diseño.

(1)=7	d=8	e=8	de=6
a=9	ad=10	ae=12	ade=10
b=34	bd=32	be=35	bde=30
ab=55	abd=50	abe=52	abde=53
c=16	cd=18	ce=15	cde=15
ac=20	acd=21	ace=22	acde=20
bc=40	bcd=44	bce=45	bcde=41
abc=60	abcd=61	abce=65	abcde=63

Haciendo el procedimiento en Minitab se obtiene:

Full Factorial Design

```
Factors:   5   Base Design:         5, 32   Resolution with blocks:  IV
Runs:     32   Replicates:              1
Blocks:    4   Center pts (total):      0

Block Generators: ACDE, BCD

Alias Structure
I

Blk1 = ACDE
Blk2 = BCD
Blk3 = ABE
```

Factorial Fit: Results versus Block, A, B, C, D, E

Estimated Effects and Coefficients for Results (coded units)

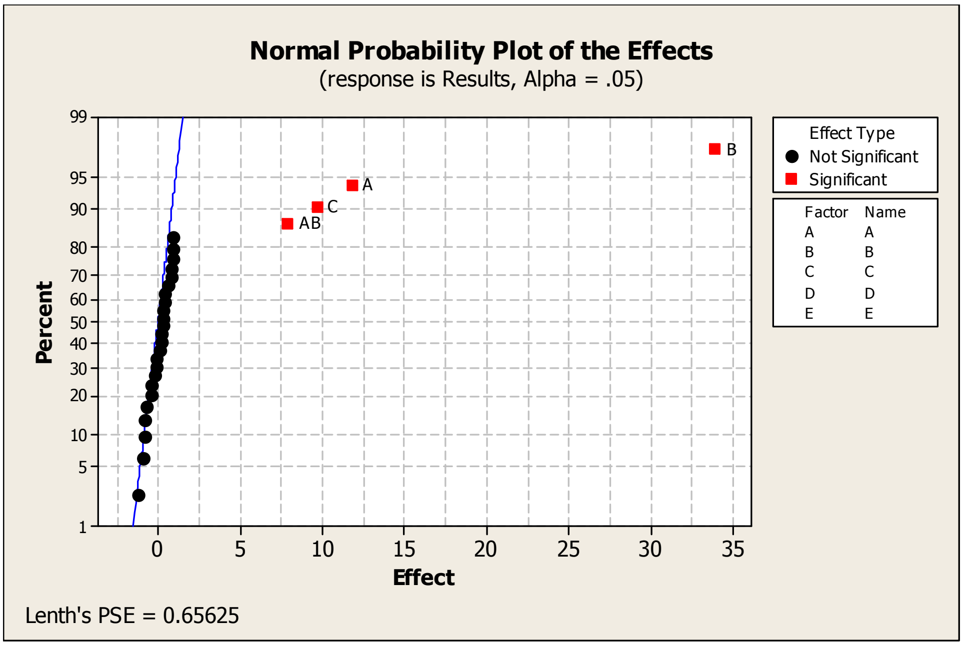
Term	Effect	Coef
Constant		30.5313
Block 1		-0.1562
Block 2		-0.2813
Block 3		0.4687
A	11.8125	5.9062
B	33.9375	16.9687
C	9.6875	4.8438
D	-0.8125	-0.4062
E	0.4375	0.2188
A*B	7.9375	3.9688
A*C	0.4375	0.2187
A*D	-0.0625	-0.0313
A*E	0.9375	0.4688
B*C	0.0625	0.0312
B*D	-0.6875	-0.3438
B*E	0.5625	0.2813
C*D	0.8125	0.4063
C*E	0.3125	0.1563
D*E	-1.1875	-0.5938
A*B*C	-0.4375	-0.2188
A*B*D	0.3125	0.1563
A*C*D	-0.4375	-0.2188
A*C*E	0.3125	0.1562
A*D*E	0.8125	0.4062
B*C*E	0.9375	0.4688
B*D*E	0.1875	0.0938
C*D*E	-0.8125	-0.4062
A*B*C*D	-0.0625	-0.0312
A*B*C*E	0.1875	0.0937
A*B*D*E	0.9375	0.4687
B*C*D*E	-0.9375	-0.4687
A*B*C*D*E	-0.1875	-0.0937

S = *

Analysis of Variance for Results (coded units)

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
Blocks	3	2.6	2.6	0.86	*	*
Main Effects	5	11087.9	11087.9	2217.58	*	*
2-Way Interactions	10	536.3	536.3	53.63	*	*
3-Way Interactions	8	22.5	22.5	2.81	*	*
4-Way Interactions	4	14.4	14.4	3.59	*	*
5-Way Interactions	1	0.3	0.3	0.28	*	*
Residual Error	0	*	*	*		
Total	31	11664.0				

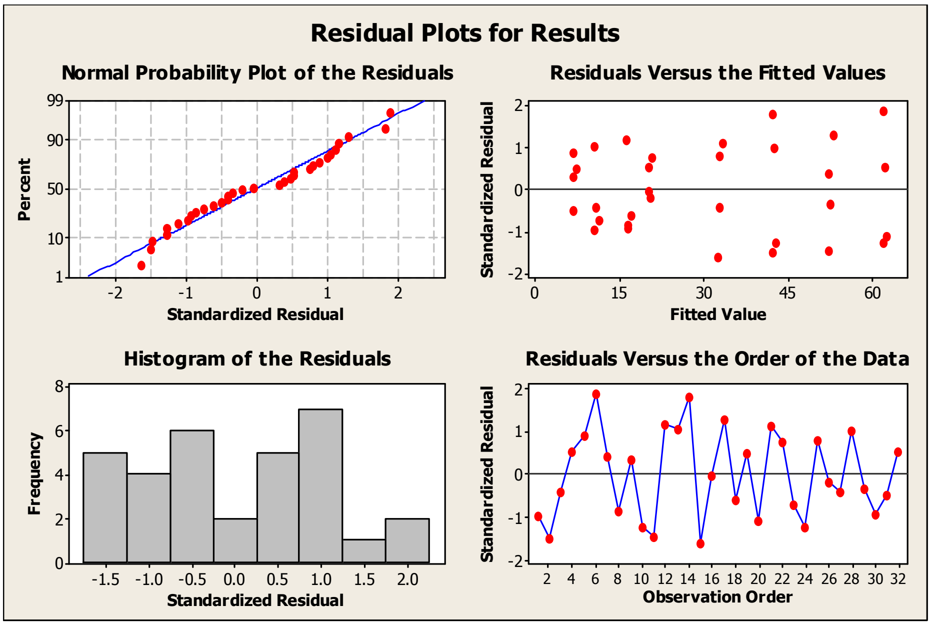
Del Anova se puede observar que los efectos más relevantes son para los factores A, B, C y la interacción AB. Con el fin de comprobar, se realiza entonces el siguiente grafico que nos muestra los efectos principales en el experimento:

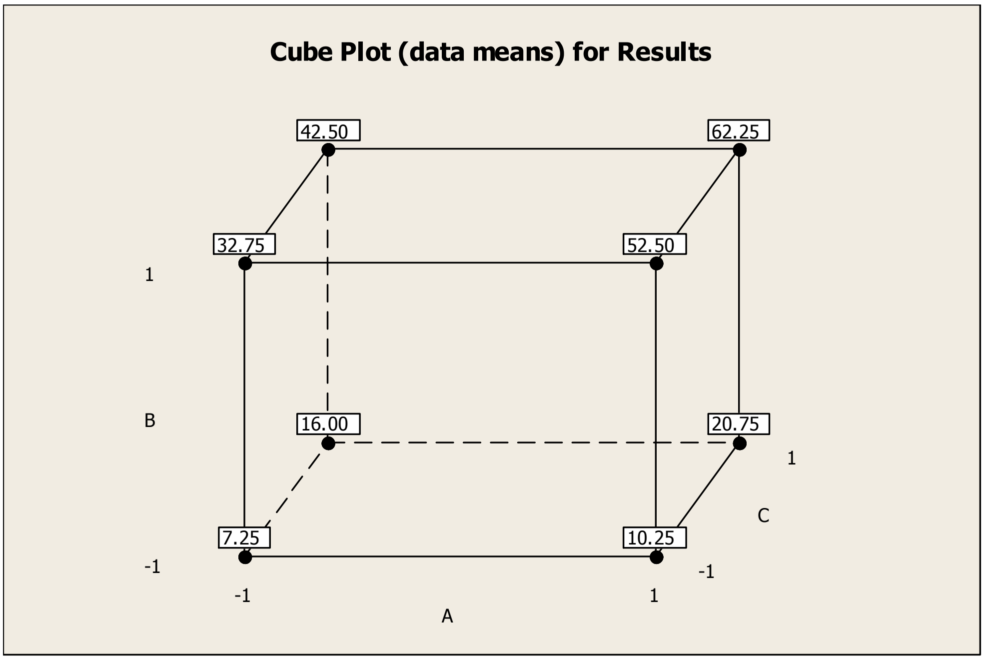


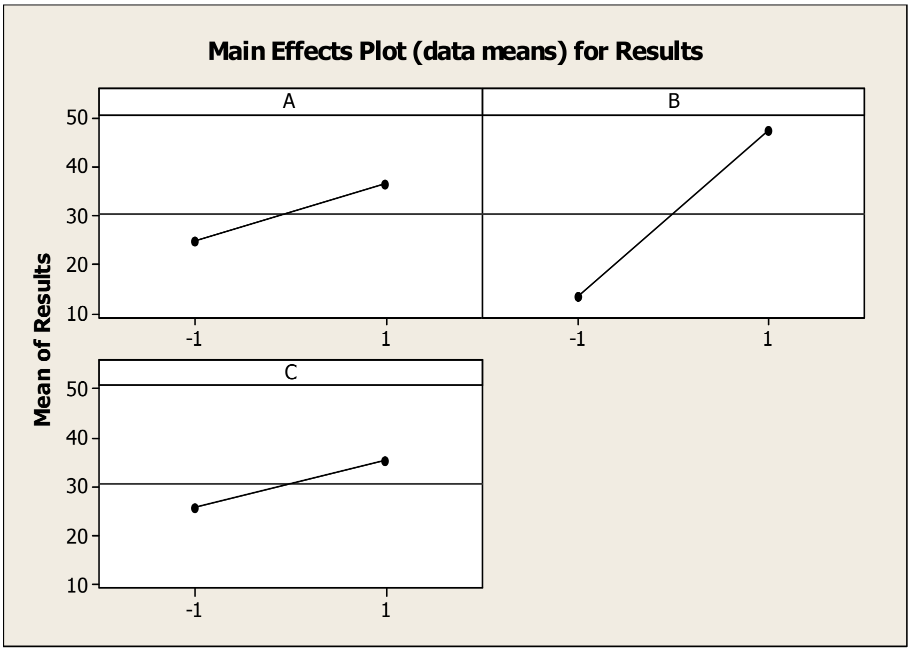
Eliminando las variables insignificantes en el análisis tenemos:

Factorial Fit: Results versus Block, A, B, C

```
Estimated Effects and Coefficients for Results (coded units)

Term        Effect      Coef  SE Coef      T      P
Constant             30.5313   0.3151  96.90  0.000
Block 1              -0.1562   0.5458  -0.29  0.777
Block 2              -0.2813   0.5458  -0.52  0.611
Block 3               0.4687   0.5458   0.86  0.399
A          11.8125    5.9062   0.3151  18.74  0.000
B          33.9375   16.9687   0.3151  53.85  0.000
C           9.6875    4.8438   0.3151  15.37  0.000
A*B         7.9375    3.9688   0.3151  12.60  0.000

S = 1.78244   R-Sq = 99.35%   R-Sq(adj) = 99.16%

Analysis of Variance for Results (coded units)

Source              DF   Seq SS   Adj SS   Adj MS        F      P
Blocks               3      2.6      2.6     0.86     0.27  0.845
Main Effects         3  11081.1  11081.1  3693.70  1162.61  0.000
2-Way Interactions   1    504.0    504.0   504.03   158.65  0.000
Residual Error      24     76.3     76.3     3.18
Total               31  11664.0
```


Residual Plots for Results
Normal Probability Plot of the Residuals
Percent
Standardized Residual
Residuals Versus the Fitted Values
Standardized Residual
Fitted Value
Histogram of the Residuals
Frequency
Standardized Residual
Residuals Versus the Order of the Data
Standardized Residual
Observation Order


Cube Plot (data means) for Results
42.50
62.25
32.75
52.50
16.00
20.75
7.25
10.25
B
A
C



Se observa que la respuesta aumenta en promedio cuando A, B y C están en su nivel alto.

1. Experimentos Fraccionarios 2^k

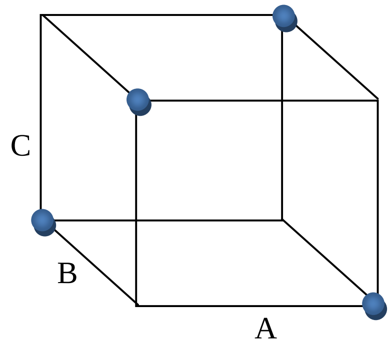
A medida que el número de factores en un diseño 2^k se incrementa, el número de tratamientos que se deben realizar aumenta rápidamente. Si se tiene un experimento con 5 factores sería un diseño 2^5 con un total de 32 tratamientos requeridos. Este diseño tiene 5 grados de libertad de los efectos principales y 10 grados de libertad debido a las interacciones. Debido a que a veces es difícil llevar a cabo todos los tratamientos se puede presumir que no todas las interacciones son significativas, por lo tanto, se puede realizar una fracción de los tratamientos. A esto se le conoce como ***Experimentos Fraccionarios 2^k***, donde fraccionarios viene de la porción que representa el número de tratamientos que se van a llevar a cabo de todos los tratamientos posibles.

Los Experimentos Fraccionarios 2^k están basados en un dogma estadístico que se desglosa en los siguientes preceptos:

1. Cuando existen múltiples factores en un proceso, el mismo va a estar explicado primordialmente sólo por algunos de los efectos principales y de las interacciones de orden bajo.
2. No todas las fuentes de variación pueden ser significativas, por lo tanto, el experimento esta conformado por las variables significativas.
3. Se puede combinar las observaciones de dos o más experimentos fraccionarios para generar una secuencia que permita estimar los efectos deseados.

Empecemos con un ejemplo para un experimento factorial de 3 factores donde solo hay presupuesto para realizar la mitad de los tratamientos. A este experimento se le llamaría la mitad del factorial o se denotaría como un experimento 2^{3-1}.

$$\frac{1}{2} \text{ de un } 2^3 \rightarrow \frac{8}{2} = 4 \text{ tratamientos}$$



Tratamientos seleccionados:
(a)
(b)
(c)
(abc)

Realizando la tabla de signos tenemos:

Tratamientos	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
a	+	-	-	-	-	+	+
b	-	+	-	-	+	-	+
c	-	-	+	+	-	-	+
abc	+	+	+	+	+	+	+

Hay una relación porque tienen los mismos signos.

De este ejemplo podemos notar que los signos de los cuatro tratamientos son positivos (+) para ABC. Por lo tanto, el efecto ABC se elimina, ha sido sacrificado, ya que sólo fue observado en su nivel alto. Cuando este efecto ocurre se le denomina como ***generador***. También podemos observar que hay tratamientos que son idénticos ya que tienen el mismo signo en los tratamientos como resultado algunos efectos están confundidos. Esto es una consecuencia de haber efectuado solo una fracción de la totalidad de los tratamientos.

Del ejemplo anterior tenemos que:

A = BC **B = AC** **C = AB**

Lo que esto nos indica es que cuando estimamos A estamos estimando BC y así sucesivamente con los demás efectos. Cuando dos o más efectos tienen esta propiedad se les conoce como ***aliases***, o sea, que esta estimación se conoce como la ***estructura de aliases***. La estructura de aliases se puede determinar no sólo observando los signos de los efectos es una tabla sino que también se puede determinar usando los efectos generadores. Una vez se conoce(n) el(los) generador(es) se multiplica(n) el(los) efecto(s) de interés por el generador y así se obtiene(n) el(los) alias(es).

Del ejemplo anterior tenemos que el generador es ABC, también conocido como generador identidad. Si multiplicamos el generador por los efectos principales obtenemos los aliases de los mismos:

$$A(ABC) = A^2BC = BC$$
$$A = BC$$

$$B(ABC) = AB^2C = AC$$
$$B = AC$$

$$C(ABC) = ABC^2 = AB$$
$$C = AB$$

La fracción que contiene el lado positivo es conocida como la ***fracción principal***. Aunque hubiésemos seleccionado los otro cuatro tratamientos que componen un experimento 2^3, o sea, el otro lado de la fracción, la estructura de aliases hubiese sido la misma ya que ambas fracciones pertenecen a la misma familia. Este experimento es pobre ya que los aliases son los efectos que contienen pocos factores no cumpliendo así con el dogma de fundir aquellos tratamientos que más efectos contenga.

Para un experimento factorial que contiene 5 factores tendríamos un total de 32 tratamientos. Si solo es posible realizar la mitad de los tratamientos entonces tendríamos $\frac{1}{2}$ de un $2^5 = \frac{32}{2} = 16$; esto implica que el mejor generador esta dado por la interacción que contenga el mayor número de factores. En este caso particular el mejor generador es la interacción ABCDE. Si multiplicamos el factor A por el generador tenemos que $A(ABCDE) = A^2BCDE = BCDE$, por lo tanto, $A = BCDE$. Si la interacción BCDE sale significativa, entonces se lo adjudicamos al factor A ya que es el que menos letras consume y es mas fácil de realizar. Este tipo de relaciones donde los factores principales tienen como aliases interacciones compuestos por muchos factores se dan cuando k es grande.

Los experimentos fraccionarios están clasificados de acuerdo a su resolución. La resolución del experimento nos proporciona una idea del tipo de estructura de aliases que el diseño posee ya que se define por el número de factores del generador con menor numero de factores contenidos en el experimento. Los diseños con particular importancia son aquellos de resolución III, IV y V. A continuación se presenta cada una de estas resoluciones:

1. ***Diseño de Resolución III***. En este tipo de experimentos ninguno de los efectos principales es alias de ningún otro efecto principal pero si son aliases de las interacciones de dos factores. También puede ser que interacciones de dos factores sean aliases entre sí. Un ejemplo de este diseño es el que discutimos previamente de $\frac{1}{2}$ de un 2^3, o sea, un 2^{3-1}.
2. ***Diseño de Resolución IV***. En este diseño ningún de los efectos principales es aliases de otro efecto principal ni de las interacciones de dos factores, pero las interacciones de dos factores son aliases entre sí. Un ejemplo es el diseño 2^{4-1} teniendo como generador la interacción ABCD.
3. ***Diseño de Resolución V***. En este tipo de diseño ninguno de los efectos principales ni de las interacciones de dos factores son alias de otro efecto principal o de alguna interacción de dos factores, pero las interacciones de dos factores son alias de las interacciones de tres factores. Un ejemplo es el que vimos para un experimento 2^{5-1} ya que el generador es ABCDE y contiene 5 (V) factores.

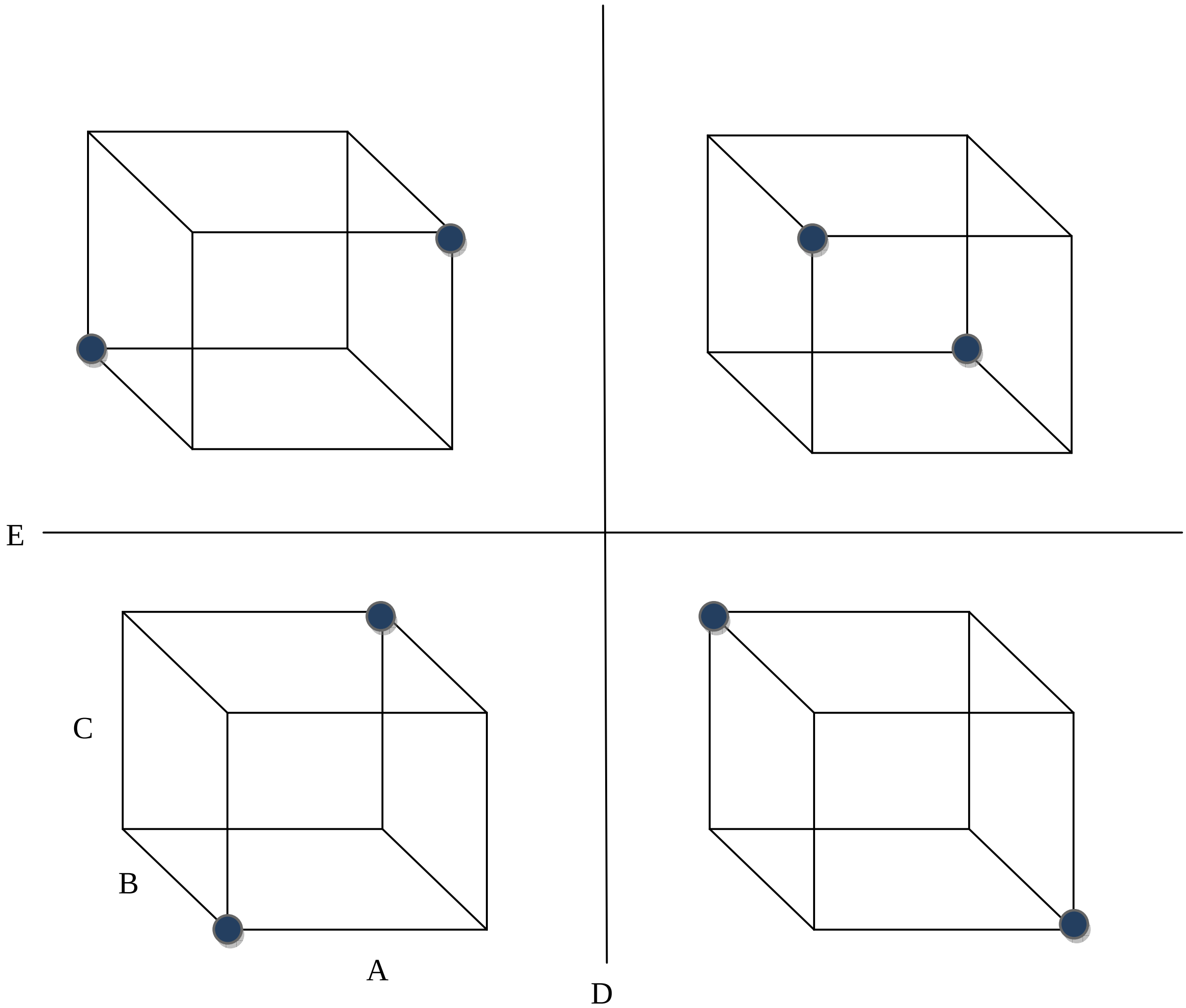
Algunos diseños fraccionarios necesitan más de un generador. Mientras mayor sea la resolución del experimento mayor cantidad de información podemos obtener de la experimentación.

Los experimentos con diseño 2^{k-1}, fracción de un medio, son un recurso adecuado para reducir el número de corridas que se requieren en un experimento pero a veces es común encontrar que fracciones menores proporcionan casi la misma cantidad de información útil pero siendo menos costoso. De forma general, un experimento 2^k puede correrse en fracciones de $\frac{1}{2^p}$ también conocido como un diseño factorial fraccionado 2^{k-p}. Por ejemplo, una fracción de $\frac{1}{4}$ se conoce como 2^{k-2}, para $\frac{1}{8}$ se conoce como 2^{k-3}, para $\frac{1}{16}$ se conoce como 2^{k-4}, y así sucesivamente. Mientras mas pequeña es la fracción mas aliases va a tener el factor principal.

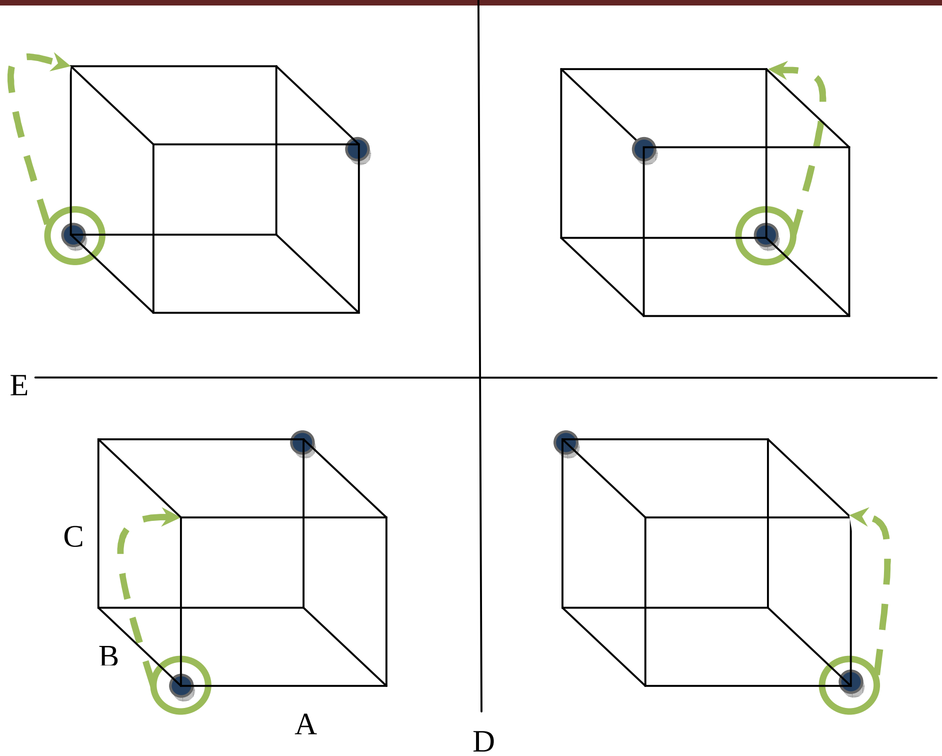
Si realizamos un experimento de 2^5 en 2^p bloques donde p = 2, entonces tenemos un experimento con fracción $\frac{1}{4}$ de un $2^5 = \frac{32}{4} = 8$ tratamientos. También se conoce como un diseño $2^{5-2} = 2^3 = 8$ tratamientos. Los factores de este experimento son A, B, C, D y E. A continuación vamos a mostrar de forma grafica los tratamientos y los generadores obtenidos del experimento a través del uso de los cubos. Debemos recordar que una vez seleccionamos los tratamientos podemos encontrar 2 de los generadores, g_1 y g_2, y el tercer generador lo podemos calcular multiplicando los dos generadores encontrados previamente, $g_1 * g_2 = g_3$.

Los tratamientos seleccionados son:

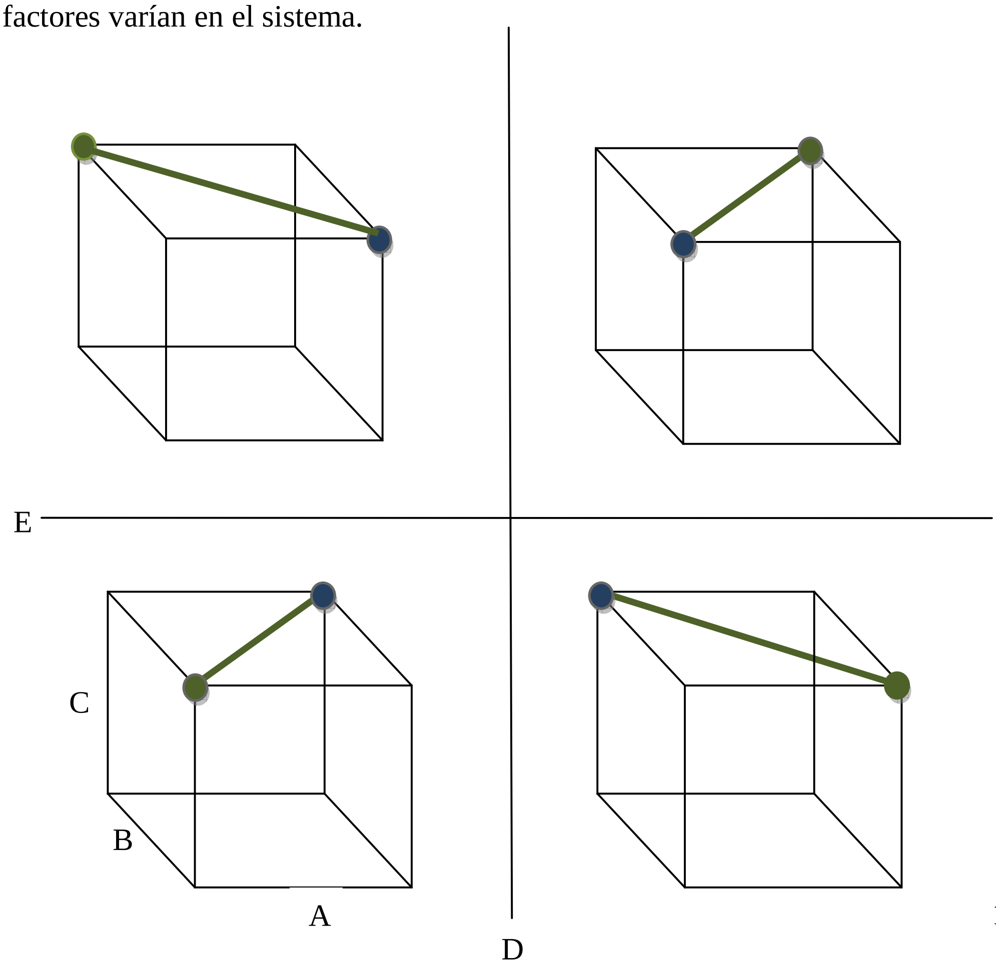
(1)
Abc
Bcd
Ad
Be
Ace
Abde
Cde



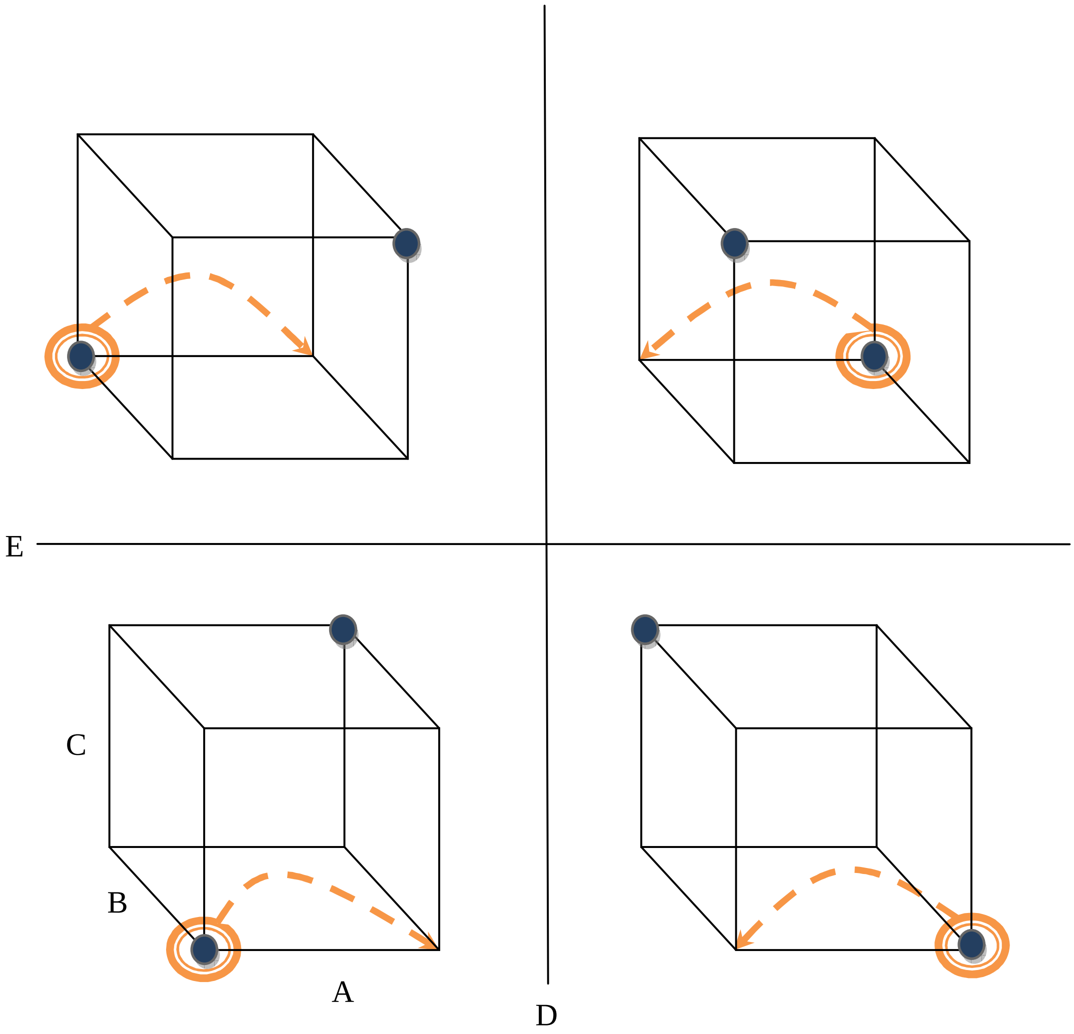
Para obtener los generadores vamos a aplicar las técnicas utilizadas en la sección de Diseño Factorial 2^k con bloques. Para este ejemplo, comenzamos proyectando el factor C de su nivel bajo a su nivel alto fundiendo los tratamientos en la interacción ABDE como se muestra en la siguiente figura:



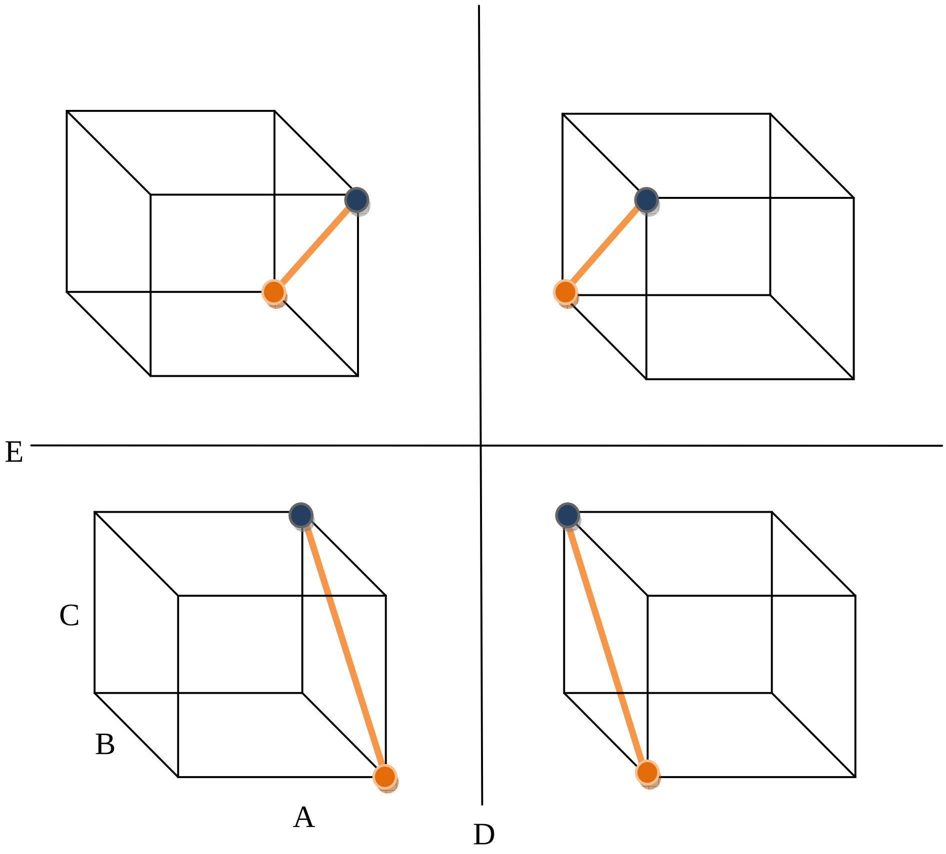
Una vez hallamos realizado las proyecciones podemos determinar el generador viendo cuales factores varían en el sistema.



Para buscar el segundo generador debemos devolver los tratamientos a su posición original y entonces proyectamos nuevamente. Proyectamos el factor A de su nivel alto a su nivel bajo y los de nivel bajo a su nivel alto y obtenemos el generador BCE como se muestra a continuación.



Una vez se haya proyectado, determinamos la interacción que viene a ser el generador.



Para determinar el tercer generador podemos aplicar la técnica de multiplicar los dos generadores ya encontrados y así obtenemos el tercer generador. Haciendo esto tenernos:

$$G_1 * G_2 = G_3$$
$$ABDE * BCE = AB^2CDE^2 = ACD$$

El tercer generador encontrado es ACD. Para comprobar que los generadores obtenidos son correctos y válidos procedemos a realizar la tabulación de los tratamientos y los factores usando los signos para definir que factores están contenidos en el tratamiento seleccionado.

Tratamientos	A	B	C	D	E	ABDE	BCE	ACD
(1)	-	-	-	-	-	-	+	-
abc	+	+	+	-	-	-	+	-
bcd	-	+	+	+	-	-	+	-
ad	+	-	-	+	-	-	+	-
be	-	+	-	-	+	-	+	-
ace	+	-	+	-	+	-	+	-
abde	+	+	-	+	+	-	+	-
cde	-	-	+	+	+	-	+	-

Las tres fuentes sacrificados son los tres generadores encontrados: ABDE, BCE y ACD. Para determinar los alias de los factores principales en este experimento, los obtenemos multiplicando los factores principales por cada uno de los generadores. Tomando como ejemplo el factor A realizamos las diferentes multiplicaciones y obtenemos lo siguiente:

$$A(BCE) = ABCE$$
$$A(ABDE) = BDE$$
$$A(ACD) = CD$$
$$\therefore$$
$$A = ABCE = BDE = CD$$

Si hacemos eso mismo para cada uno de los factores, los diferentes aliases obtenidos para cada factor son los siguientes:

$$B = CE = ADE = ABCD$$
$$C = BE = ABCDE = AD$$
$$D = BCDE = ABE = AC$$
$$E = BC = ABD = ACDE$$

Como podemos notar el total de fuentes en este experimento son $2^5 - 1 = 31$ fuentes. Hasta ahora solo tenemos 23 fuentes, por lo tanto, debemos encontrar aquellas fuentes que no están contempladas. Todos los factores principales ya se encontraron, por lo tanto, procedemos a buscar las interacciones de 2 factores para determinar las que faltan. Entre las interacciones de 2 factores tenemos:

$$\begin{array}{ccc} AD & BC & CD \\ AC & BE & CE \end{array}$$

Sólo se encontraron 6 interacciones de dos factores. Para determinar las demás interacciones que hacen falta comenzamos determinando una interacción de dos factores que no se ha contemplado aún y se multiplica por los generadores para así obtener parte de las interacciones restantes. La primera interacción de dos factores que no se contempló es AB y si multiplicamos esta interacción por los generadores obtenemos las siguientes interacciones como se muestra a continuación:

$$
\begin{aligned}
&AB(BCE) = AB^2CE = ACE \\
&AB(ABDE) = A^2B^2DE = DE \\
&AB(ACD) = A^2BCD = BCD \\
&\therefore \\
&AB = ACE = DE = BCD
\end{aligned}
$$

Ahora tenemos 27 fuentes de las 31 fuentes que componen este experimento. Añadimos las interacciones de dos factores que se encontraron y procedemos a buscar aquellas interacciones de dos factores que aún no se han contemplado. Por lo tanto, las nuevas interacciones de dos factores son: AB y DE. Podemos notar que la interacción AE no está contemplada aún, por lo tanto, procedemos a buscar sus aliases como los hicimos anteriormente.

$$
\begin{aligned}
&AE(BCE) = ABCE^2 = ABC \\
&AE(ABDE) = A^2BDE^2 = BD \\
&AE(ACD) = A^2CDE = CDE \\
&\therefore \\
&AE = ABC = BD = CDE
\end{aligned}
$$

Como podemos notar ya encontramos las 31 fuentes que componen este experimento, determinando así todos los aliases que se muestran a continuación en resumen:

A = ABCE = BDE = CD
B = CE = ADE = ABCD
C = BE = ABCDE = AD
D = BCDE = ABE = AC
E = BC = ABD = ACDE
AB = ACE = DE = BCD
AE = ABC = BD = CDE

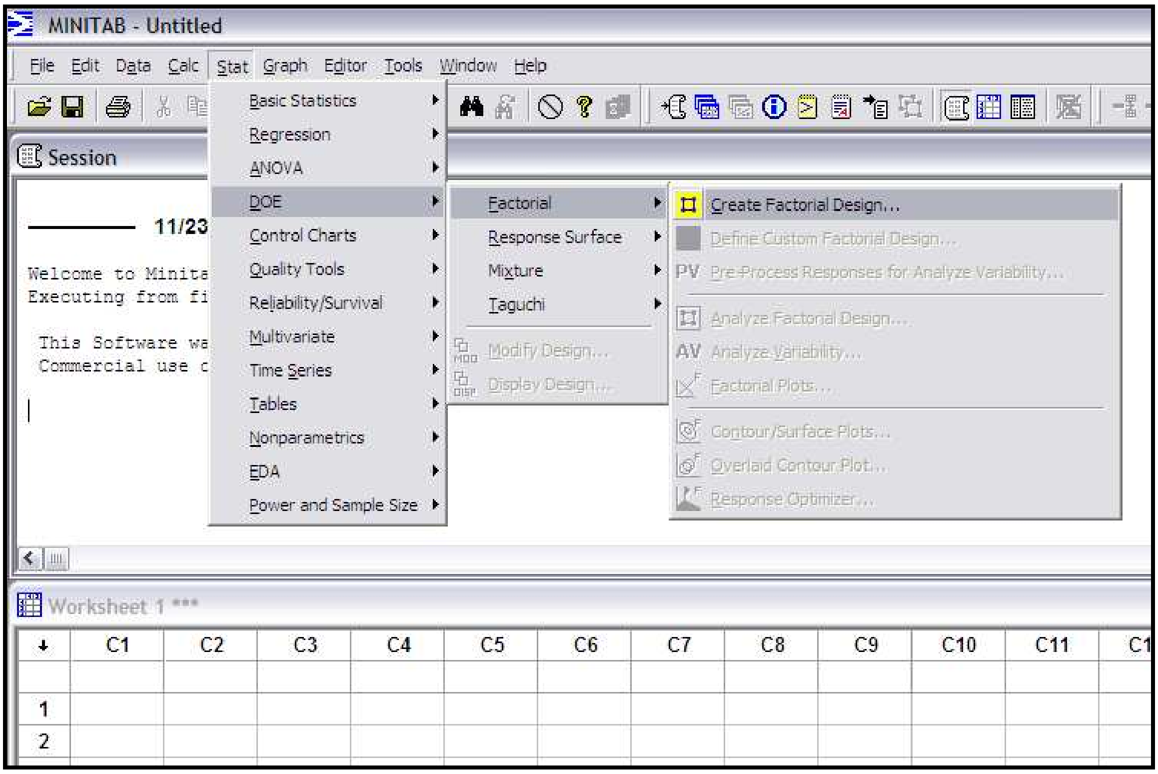
De este experimento podemos concluir que es un experimento con 7 grados de libertad y es un experimento de Resolución III ya que el generador que contiene el menor número de factores es un generador de 3 factores y en este experimento dos de los generadores contienen 3 factores. También podemos observar que mientras más pequeña es la fracción de tratamientos que se van a llevar a cabo más complicada es la relación de los factores.

Ejemplo 1. Utilizando MINITAB:

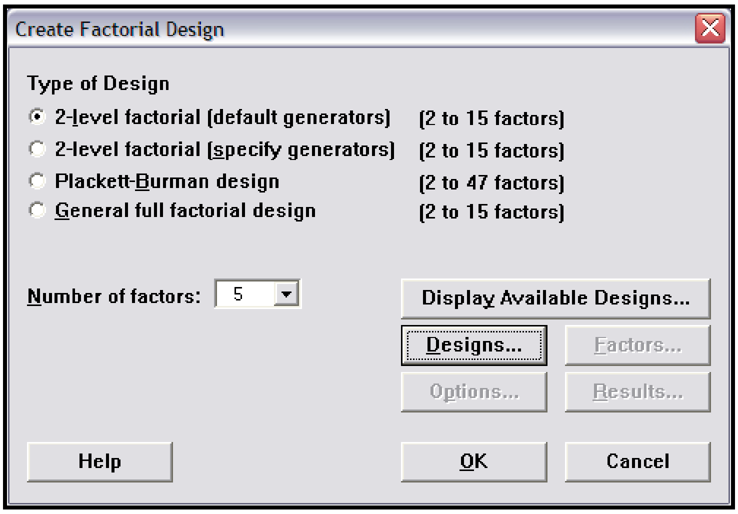
Un ingeniero realizó un experimento en el cual se utilizó un diseño $2^{(5-1)}$ con I=ABCDE para investigar los efectos de cinco factores en la temperatura de un proceso de esterilizacion. Los factores son A, B, C, D y E. Los resultados obtenidos son como siguen:

e= -0.63	d=6.79
a= 2.51	ade= 5.47
b= -2.68	bde= 3.45
abe=1.66	abd=5.68
c= 2.06	cde= 5.22
ace=1.22	acd=4.38
bce=-2.09	bcd=4.30
abc=1.93	abcde= 4.05

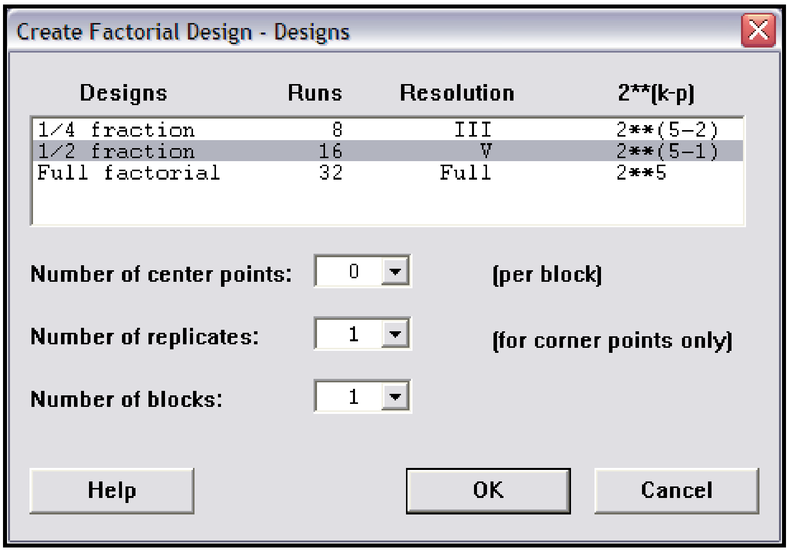
Para generar la fracción de los efectos que componen este experimento en Minitab seleccionamos la opción de ***STAT***, de forma subsiguiente seleccione ***DOE*** luego ***Factorial*** y, por ultimo, seleccione ***Create Factorial Design*** como se muestra en la siguiente figura:



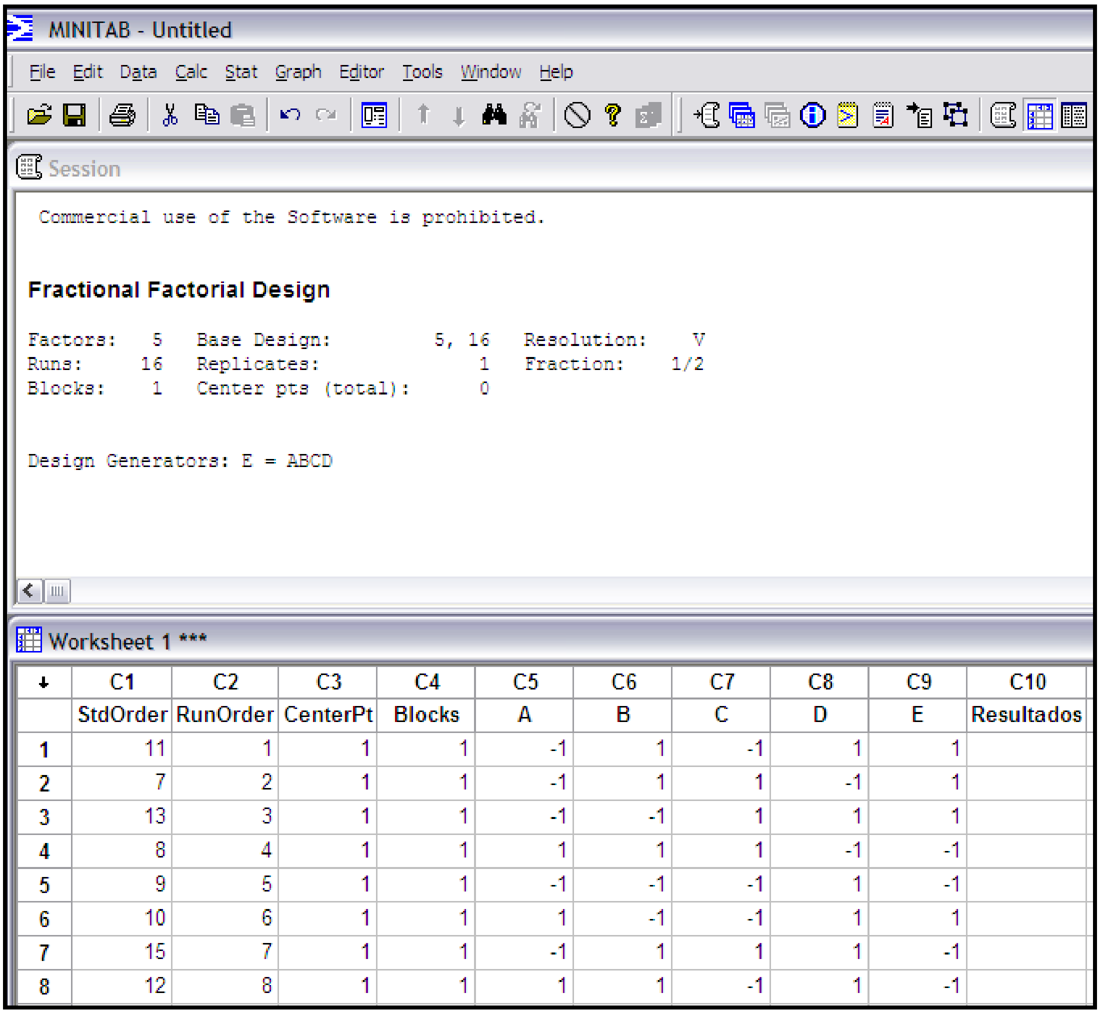
Como consecuencia aparecerá una pantalla, como la que se muestra a continuación, en la cual se especifica el tipo de diseño y el número de factores. Para el ejemplo que estamos evaluando seleccionamos la primera opción, ***“default generators”***, ya que el generador no esta especificado en el problema y tenemos cinco factores.



En esta pantalla tenemos una opción de ***Design*** en el cual nos permite seleccionar si el diseño se va a correr con todos los tratamientos o solo con una fracción de ellos. Al oprimir el botón de Design aparece la siguiente pantalla:



En nuestro ejemplo se estarán efectuando solamente la mitad de los tratamientos requeridos, por lo tanto, seleccionamos la opción de ½ fraction. Para efectos del ejemplo solo tenemos una replica, no hay puntos centrales y solo hay un bloque debido a que las condiciones experimentales se presumen homogéneas. Como resultado se generan los efectos que se muestran en la próxima figura. Como podemos notar se generaron solo 16 efectos. A la hora de ingresar los datos tenemos que tener cuidado ya que debemos tener en cuenta los signos de los factores para saber a que efecto pertenece. Por ejemplo, en el primer tratamiento generado tenemos: A = -1, B = 1, C = -1, D = 1 y E = 1, por lo tanto el tratamiento corresponde a la interacción BDE que tiene un valor de 3.45 (según los datos dados en el enunciado). Así sucesivamente se van ingresando los datos al efecto correspondiente. También podemos notar que el software determinó el generador que esta dado por E = ABCD.

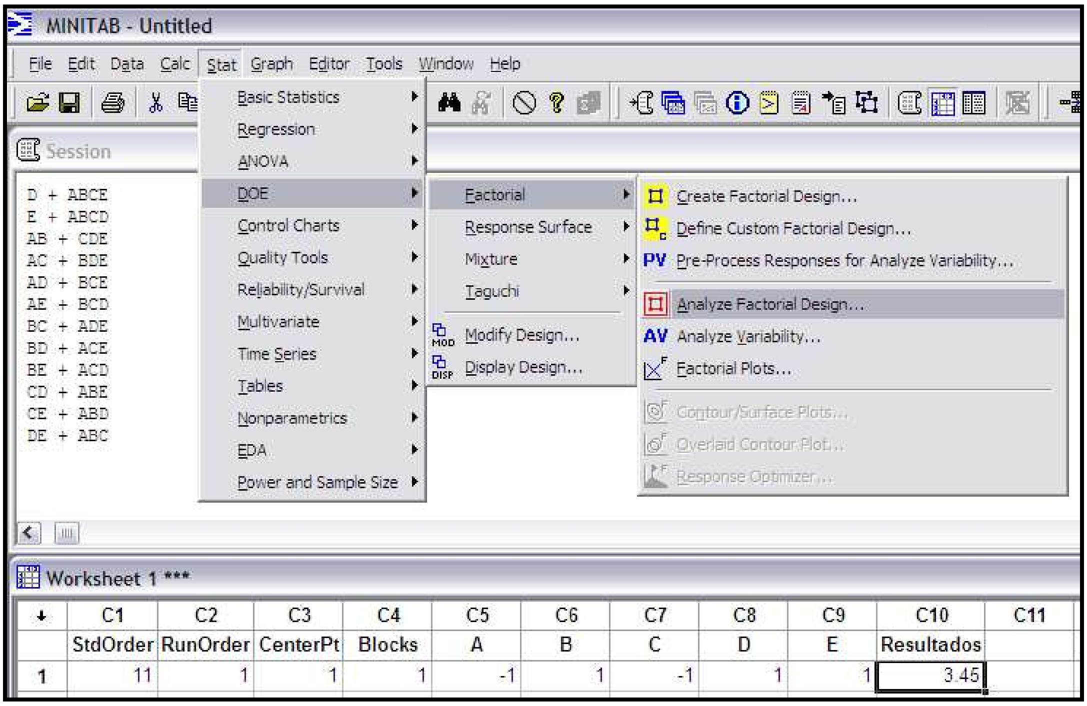


↓	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10
	StdOrder	RunOrder	CenterPt	Blocks	A	B	C	D	E	Resultados
1	11	1	1	1	-1	1	-1	1	1	
2	7	2	1	1	-1	1	1	-1	1	
3	13	3	1	1	-1	-1	1	1	1	
4	8	4	1	1	1	1	1	-1	-1	
5	9	5	1	1	-1	-1	-1	1	-1	
6	10	6	1	1	1	-1	-1	1	1	
7	15	7	1	1	-1	1	1	1	-1	
8	12	8	1	1	1	1	-1	1	-1	

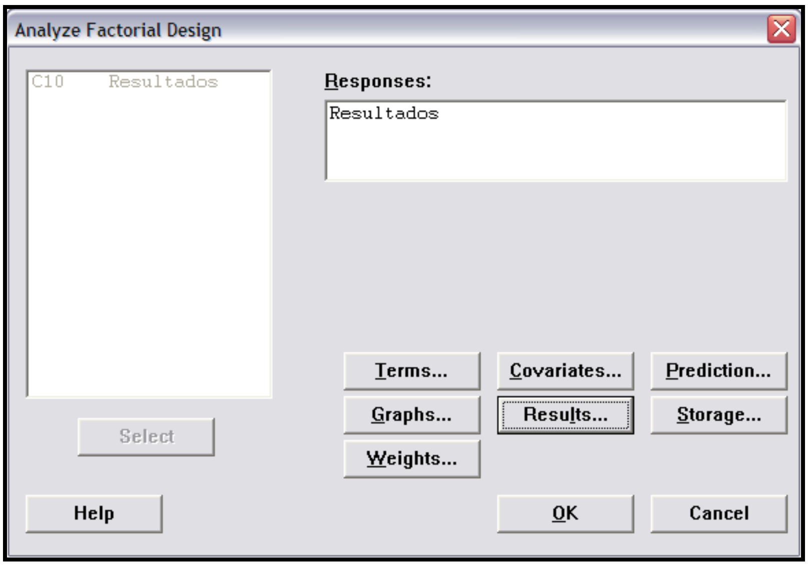
Como parte de la información que podemos obtener al generar este diseño es la estructura de aliases que es la siguiente:

```
Alias Structure

I + ABCDE

A + BCDE
B + ACDE
C + ABDE
D + ABCE
E + ABCD
AB + CDE
AC + BDE
AD + BCE
AE + BCD
BC + ADE
BD + ACE
BE + ACD
CD + ABE
CE + ABD
DE + ABC
```

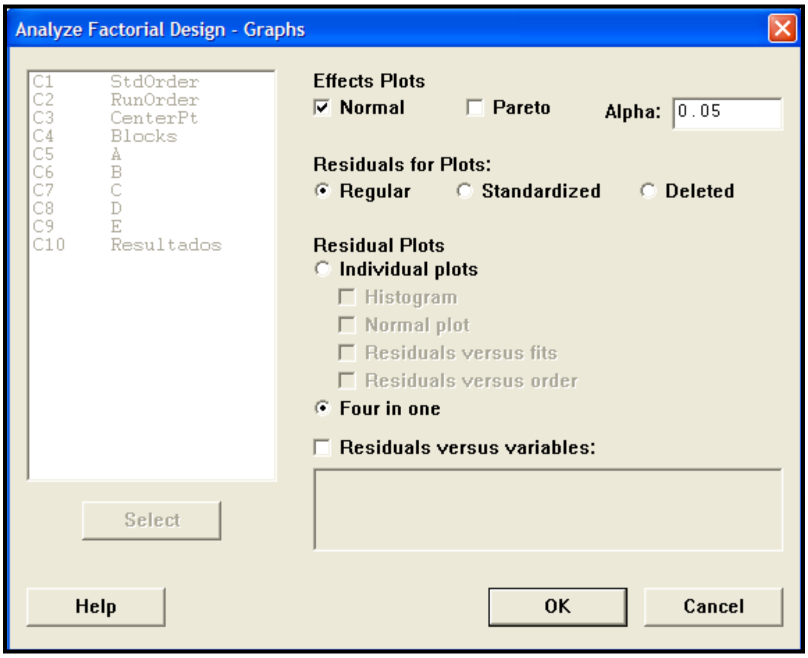
Para realizar el análisis de este diseño hay que seleccionar ***STAT***, de forma subsiguiente se selecciona ***DOE***, luego ***Factorial*** y, por ultimo, ***Analyze Factorial Design*** como se muestra a continuación:



La pantalla que aparece a continuación nos permite seleccionar la columna en donde se encuentran los resultados de este experimento.

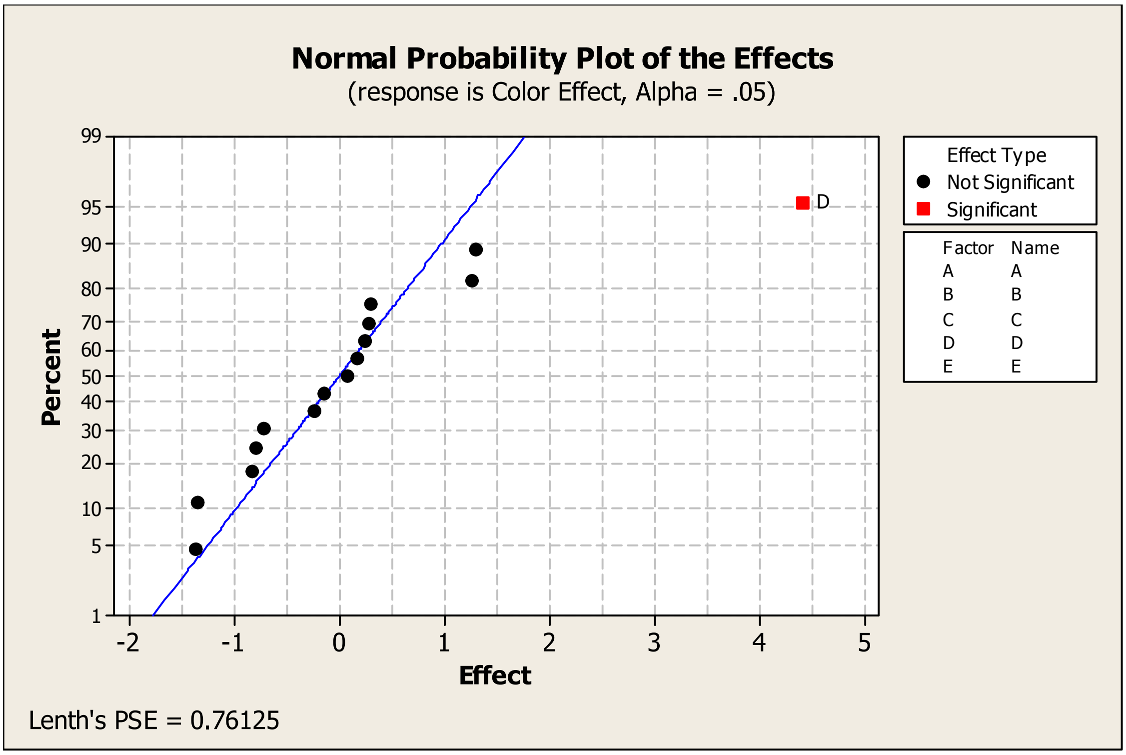


Para obtener las gráficas de normalidad y las graficas de los residuales se selecciona la opción de ***Graphs*** del Analyze Factorial Design y se obtiene la siguiente pantalla.



Preguntas concernientes al planteamiento:

a) Prepare un plano normal de los efectos. ¿Cuál de los efectos aparecen relevantes?



En esta gráfica podemos observar que sólo el factor D es significativo.

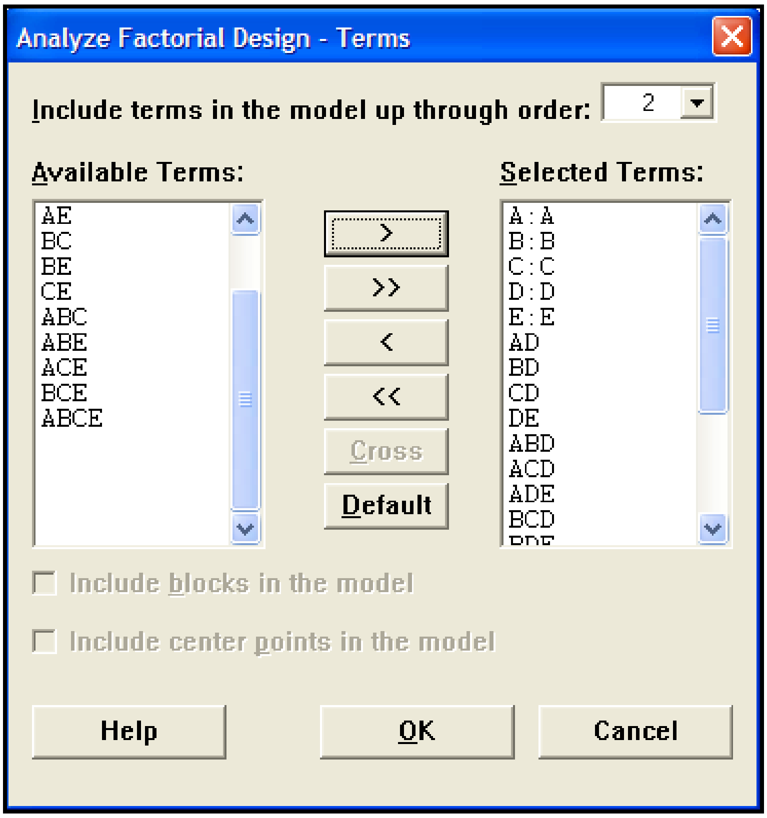
b) Calcule los residuales. Construya la gráfica de probabilidad normal de los residuales y grafique los residuales versus los valores ajustados. Comente sobre las gráficas.

Factorial Fit: Color Effect versus A, B, C, D, E

```
Estimated Effects and Coefficients for Color Effect (coded units)

Term        Effect     Coef
Constant             2.7075
A           1.3100   0.6550
B          -1.3400  -0.6700
C          -0.1475  -0.0738
D           4.4200   2.2100
E          -0.8275  -0.4138
A*B         1.2750   0.6375
A*C        -0.7875  -0.3937
A*D        -1.3550  -0.6775
A*E         0.3025   0.1513
B*C         0.1675   0.0838
B*D         0.2450   0.1225
B*E         0.2875   0.1437
C*D        -0.7125  -0.3562
C*E        -0.2400  -0.1200
D*E         0.0875   0.0437


S = *


Analysis of Variance for Color Effect (coded units)

Source              DF  Seq SS  Adj SS  Adj MS  F  P
Main Effects         5   95.02   95.02  19.004  *  *
2-Way Interactions  10   19.67   19.67   1.967  *  *
Residual Error       0       *       *       *
Total               15  114.69
```

Como podemos notar no es posible obtener las graficas de normalidad y residuales debido a que no hay error ya que en este experimento no hay réplicas, además, que no todos los tratamientos se llevaron a cabo, es por esto que los grados de libertad del error son cero. Para poder contestar esta pregunta es necesario eliminar de mi análisis todos aquellos factores que no son significativos en mi experimento ya que con todos los factores incluidos el error me da a 0 y no tengo P-values ni F. Según la grafica de normalidad de los efectos el único factor significativo es D, por lo tanto, se mantienen los factores principales y todas las interacciones en las cuales el factor D este contenido.

Esto lo podemos conseguir seleccionando la opción de ***Term*** en la pantalla de ***Analyze Factorial Design***. Al oprimir esta opción aparece la siguiente pantalla.



Seleccionamos solo los factores principales y las interacciones que contienen al factor D y seleccionamos OK. Los resultados obtenidos son los siguientes:

Factorial Fit: Resultados versus A, B, C, D, E

Estimated Effects and Coefficients for Resultados (coded units)

Term	Effect	Coef	SE Coef	T	P
Constant		2.7075	0.2098	12.91	0.000
A	1.3100	0.6550	0.2098	3.12	0.026
B	-1.3400	-0.6700	0.2098	-3.19	0.024
C	-0.1475	-0.0738	0.2098	-0.35	0.739
D	4.4200	2.2100	0.2098	10.54	0.000
E	-0.8275	-0.4138	0.2098	-1.97	0.106
A*B	1.2750	0.6375	0.2098	3.04	0.029
A*D	-1.3550	-0.6775	0.2098	-3.23	0.023
B*D	0.2450	0.1225	0.2098	0.58	0.585
C*D	-0.7125	-0.3563	0.2098	-1.70	0.150
D*E	0.0875	0.0438	0.2098	0.21	0.843

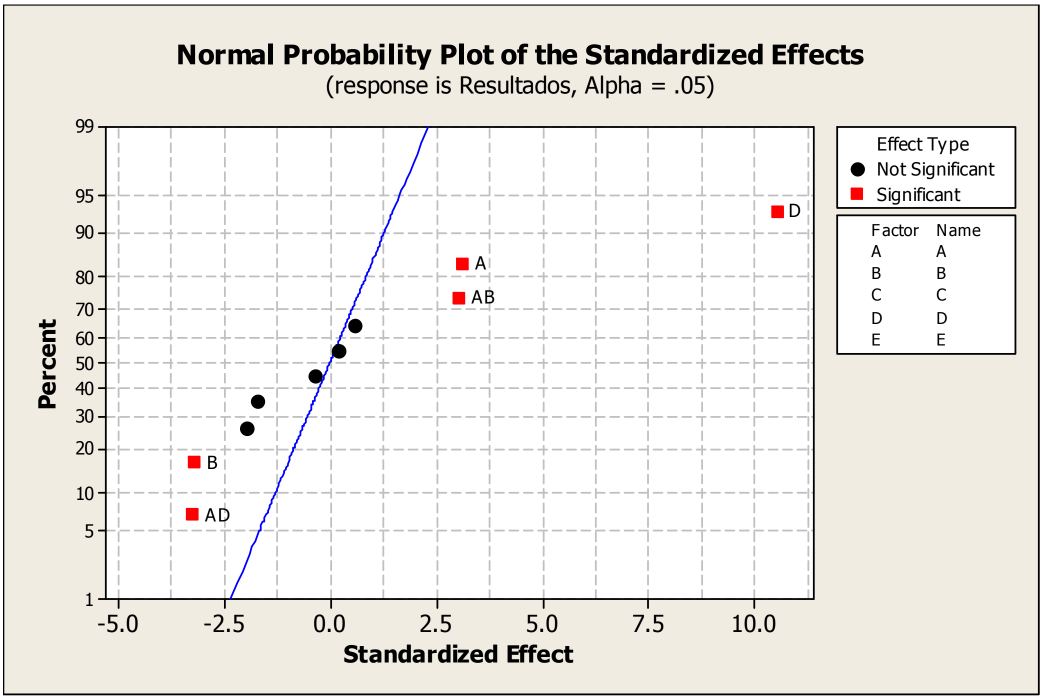
S = 0.839035   R-Sq = 96.93%   R-Sq(adj) = 90.79%

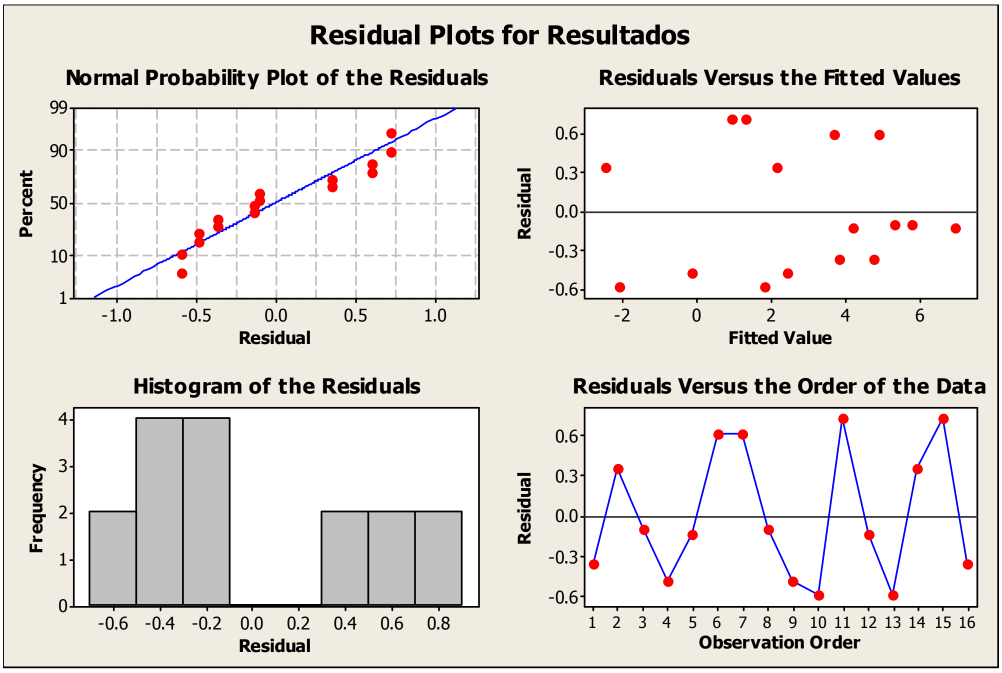
Analysis of Variance for Resultados (coded units)

```
Source              DF    Seq SS   Adj SS    Adj MS      F      P
Main Effects         5    95.018   95.018   19.0037  26.99  0.001
2-Way Interactions   5    16.148   16.148    3.2296   4.59  0.060
Residual Error       5     3.520    3.520    0.7040
Total               15   114.686
```

Effects Plot for Resultados

```
Alias Structure
I + A*B*C*D*E
A + B*C*D*E
B + A*C*D*E
C + A*B*D*E
D + A*B*C*E
E + A*B*C*D
A*B + C*D*E
A*D + B*C*E
B*D + A*C*E
C*D + A*B*E
D*E + A*B*C
```



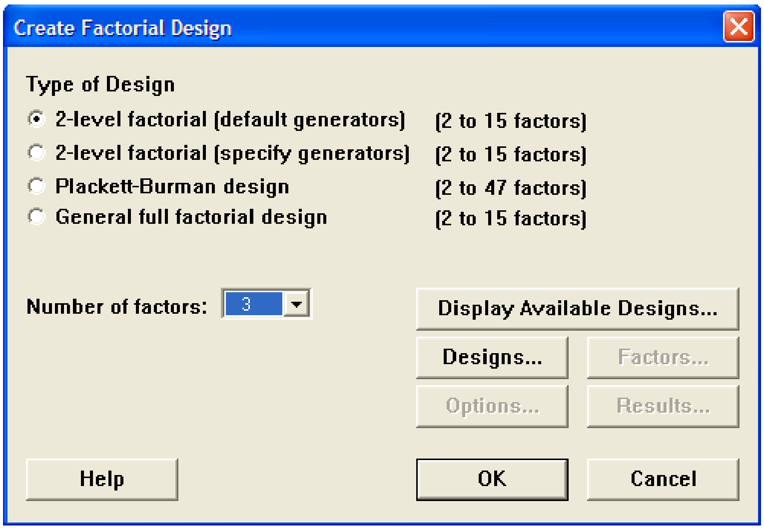


Como podemos observar en la gráfica de normalidad, aumentó el número de efectos significativos debido a la eliminación de las interacciones que no componían el efecto significativo inicial generando así replicas con las cuales se pudo estimar el error. Ahora los efectos significativos en el experimento son A, B, D, AB y AD.

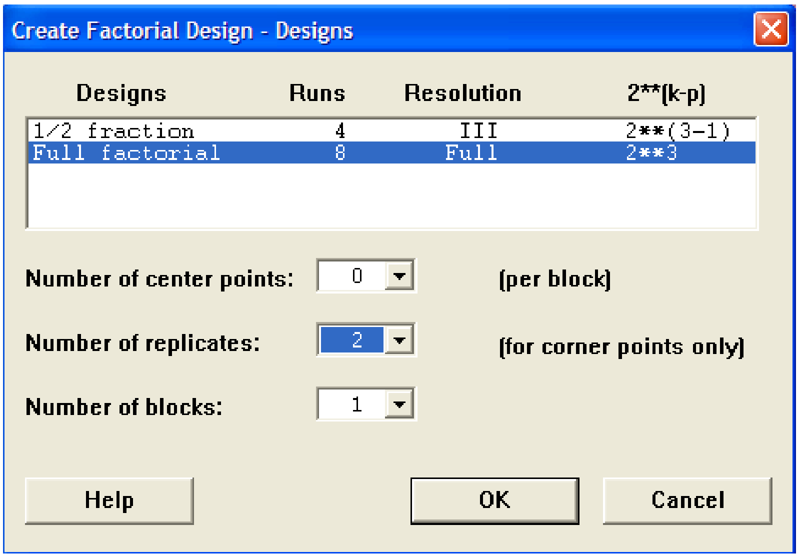
c) Si cualquier factor es despreciable, colapse el diseño a un 2^(5-1) full factorial en los factores significativos. Comente en los resultados del diseño e interprete los resultados.

Como el número de efectos significativos obtenidos en el experimento original fueron 3 factores (A, B y D) entonces creamos un diseño full factorial 2^3 de la siguiente manera:

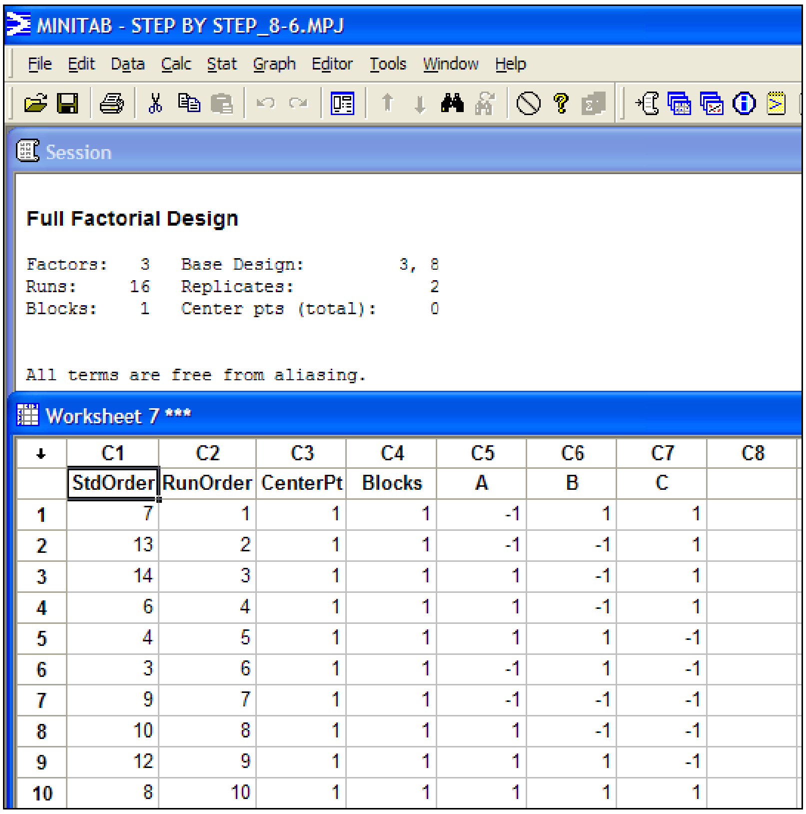
Esta vez utilizamos solo 3 efectos y sería:



En la opción de *Design*, seleccionamos un *Full Factorial*. Pero en la opción de *Number of replicates* seleccionamos dos replicas ya que el efecto de eliminar las variables no significativas (C y E) me generan replicas a los tratamientos que resultaron significativos.

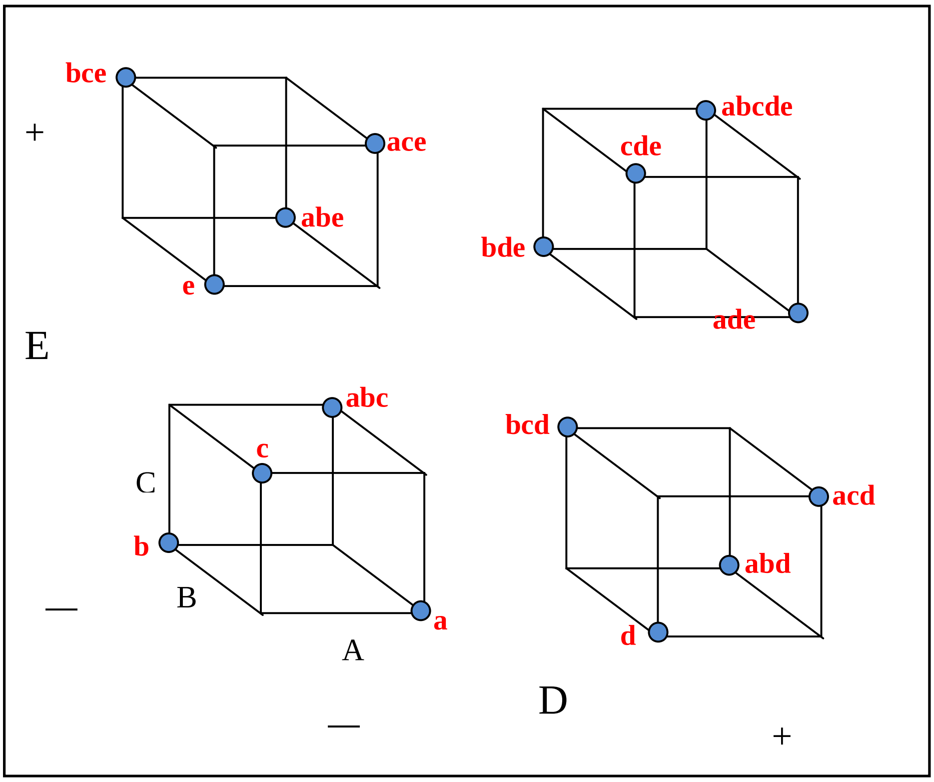


La tabla resultante sería:

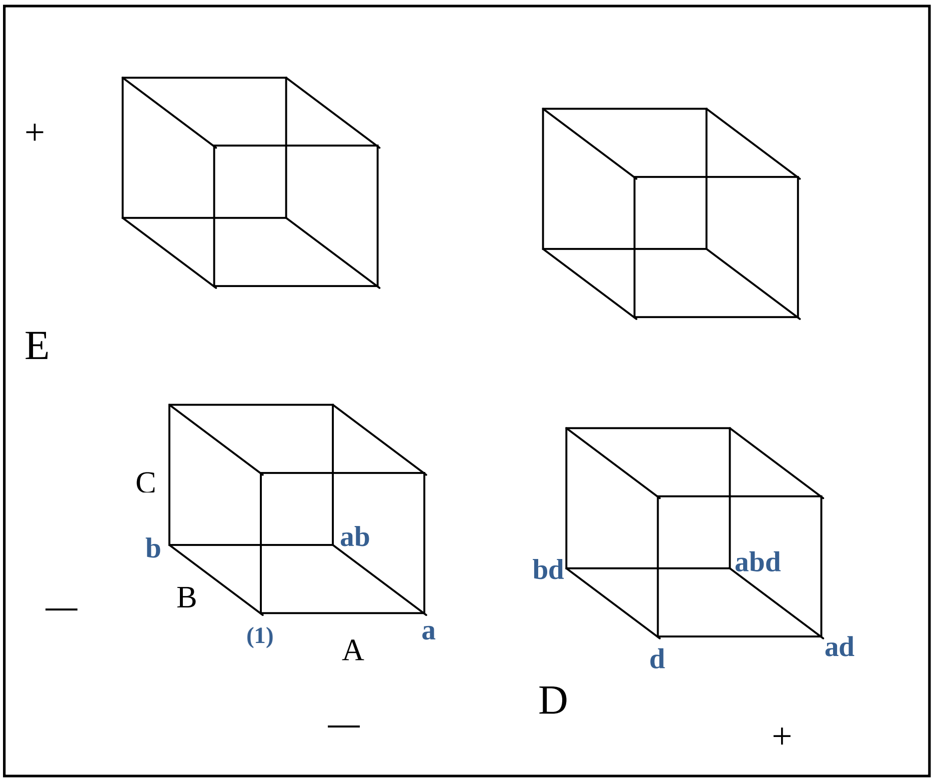


↓	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
	StdOrder	RunOrder	CenterPt	Blocks	A	B	C	
1	7	1	1	1	-1	1	1	
2	13	2	1	1	-1	-1	1	
3	14	3	1	1	1	-1	1	
4	6	4	1	1	1	-1	1	
5	4	5	1	1	1	1	-1	
6	3	6	1	1	-1	1	-1	
7	9	7	1	1	-1	-1	-1	
8	10	8	1	1	1	-1	-1	
9	12	9	1	1	1	1	-1	
10	8	10	1	1	1	1	1	

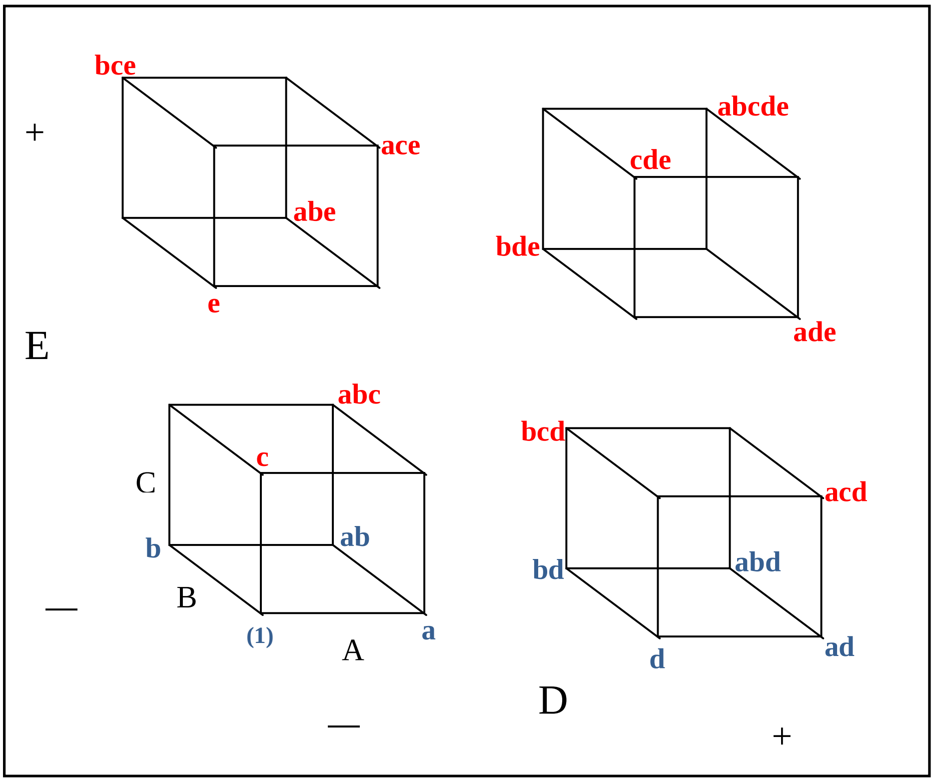
Como podemos notar el software genera 3 factores A, B, C, pero debemos tener cuidado ya que el factor C generado corresponde al factor D en el experimento que fue uno de los factores significativos. Se hace el cambio en el nombre para evitar confusiones al entrar la data. El total de tratamientos generados son 8 pero duplicados ya que tenemos dos réplicas. Para determinar que tratamientos son replicas de otros tratamientos procedemos a eliminar aquellos factores que no salieron significativos de utilizando el método de cubos. Primero procedemos a identificar todos los tratamientos del experimento original 2^(5-1) de la siguiente manera:



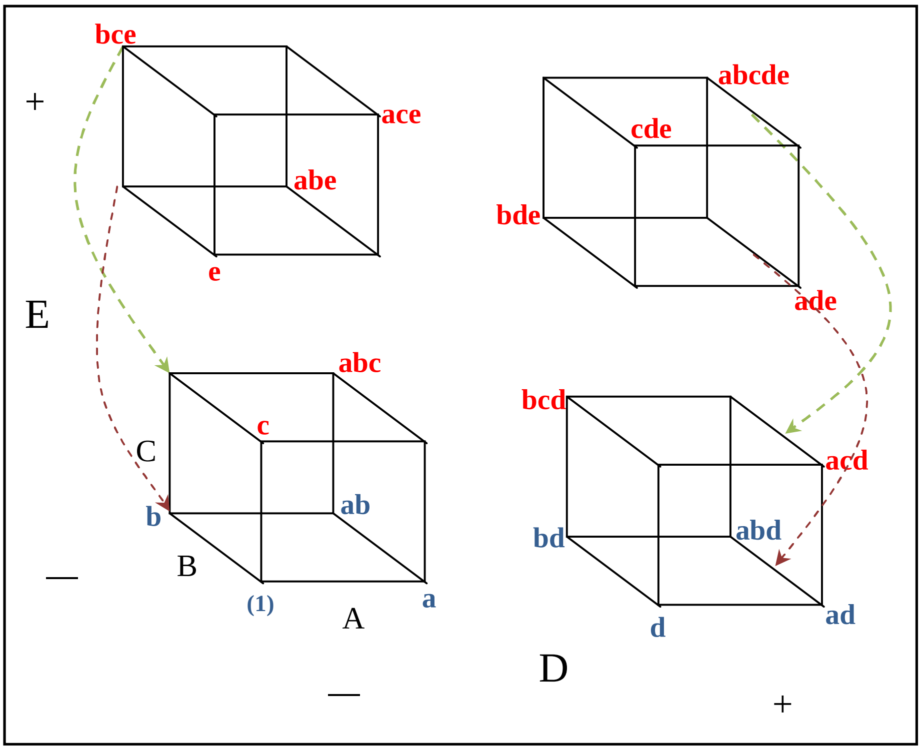
Ahora, identificando los tratamientos generados aleatoriamente por MINITAB para el diseño 2^3 tenemos:



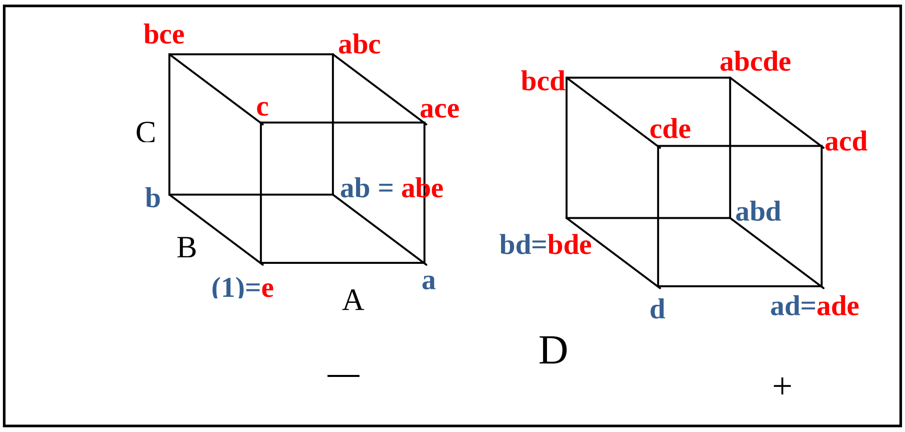
Para obtener las replicas lo que se hace es eliminar factores uniendo caras, para poder identificar como se van obteniendo las replicas del problema usando los datos obtenidos de los tratamientos del experimento original vamos a unir los dos bloques en donde los tratamientos color azul son los tratamientos actuales y los rojos van a ser las replicas de los mismos. Los datos obtenidos son para los tratamientos de rojo. Uniendo ambos bloques tenemos:



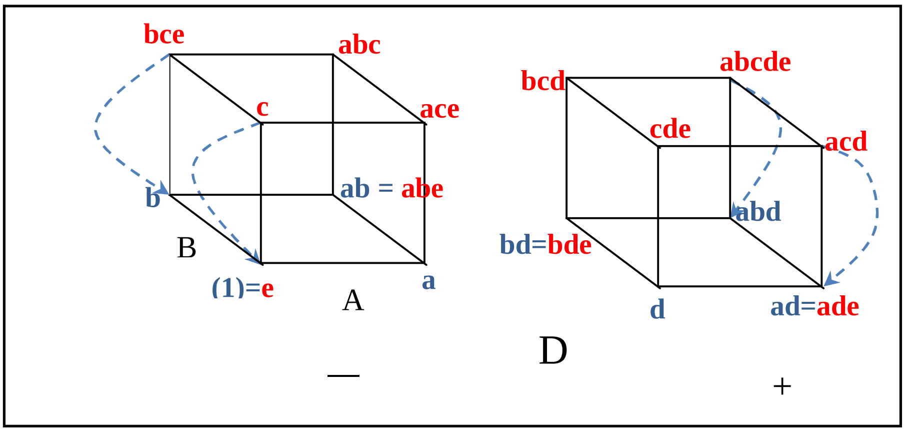
Comenzamos eliminando uno de los factores que inicialmente no fueron significativos. Escogemos el factor E y eliminamos de esta manera:



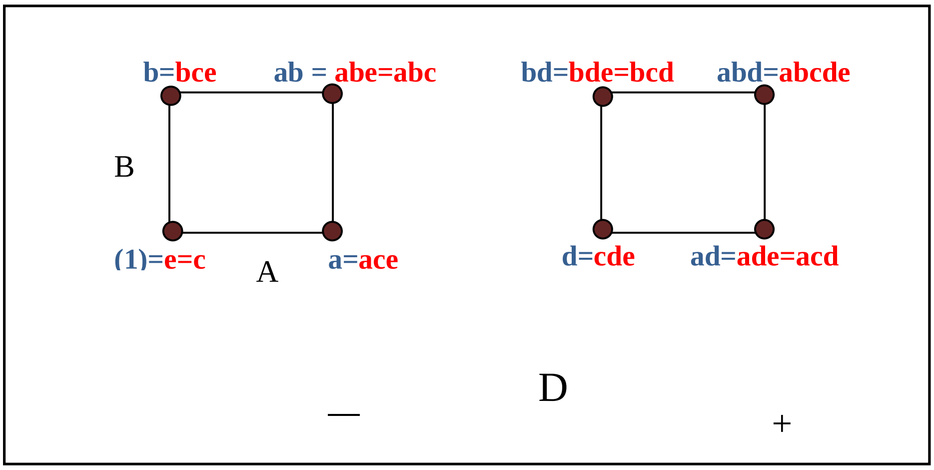
Obtenemos el siguiente resultado:



Nos resta eliminar el otro factor no significativo que fue el factor C y esto lo hacemos de la siguiente manera:



Resultando en:



Los tratamientos de este diseño y sus replicas correspondientes a los datos de los tratamientos del diseño anterior (se toma los valores de esos tratamientos como réplicas) están dados en la siguiente gráfica:

Tratamientos actuales	Replica 1	Replica 2
AD	ADE	ACD
D	D	CDE
A	A	ACE
AB	ABC	ABE
BD	BCD	BDE
B	B	BCE
ABD	ABD	ABCDE
(1)	E	C

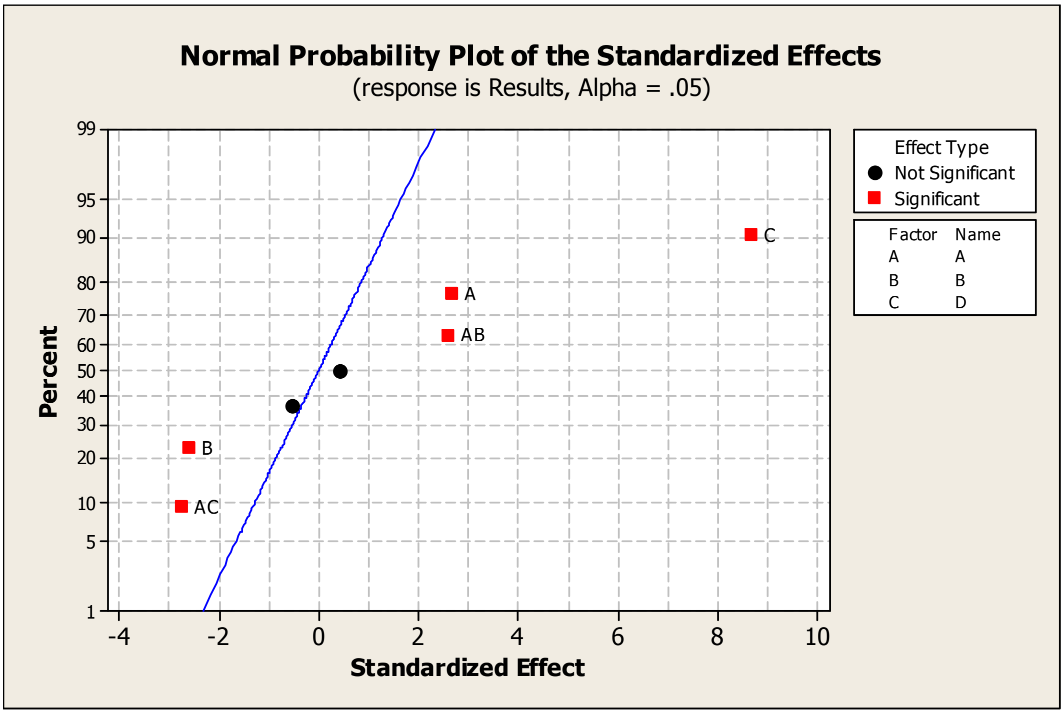
Factorial Fit: Results versus A, B, D

```
Estimated Effects and Coefficients for Results (coded units)

Term        Effect     Coef  SE Coef      T      P
Constant             2.7244   0.2522  10.80  0.000
A           1.3437   0.6719   0.2522   2.66  0.029
B          -1.3063  -0.6531   0.2522  -2.59  0.032
D           4.3863   2.1931   0.2522   8.70  0.000
A*B         1.3087   0.6544   0.2522   2.59  0.032
A*D        -1.3888  -0.6944   0.2522  -2.75  0.025
B*D         0.2112   0.1056   0.2522   0.42  0.686
A*B*D      -0.2737  -0.1369   0.2522  -0.54  0.602


S = 1.00873   R-Sq = 92.87%   R-Sq(adj) = 86.63%

Analysis of Variance for Results (coded units)

Source              DF   Seq SS   Adj SS   Adj MS      F      P
Main Effects         3   91.005  91.0046  30.3349  29.81  0.000
2-Way Interactions   3   14.744  14.7443   4.9148   4.83  0.033
3-Way Interactions   1    0.300   0.2998   0.2998   0.29  0.602
Residual Error       8    8.140   8.1403   1.0175
  Pure Error         8    8.140   8.1404   1.0175
Total               15  114.189
```

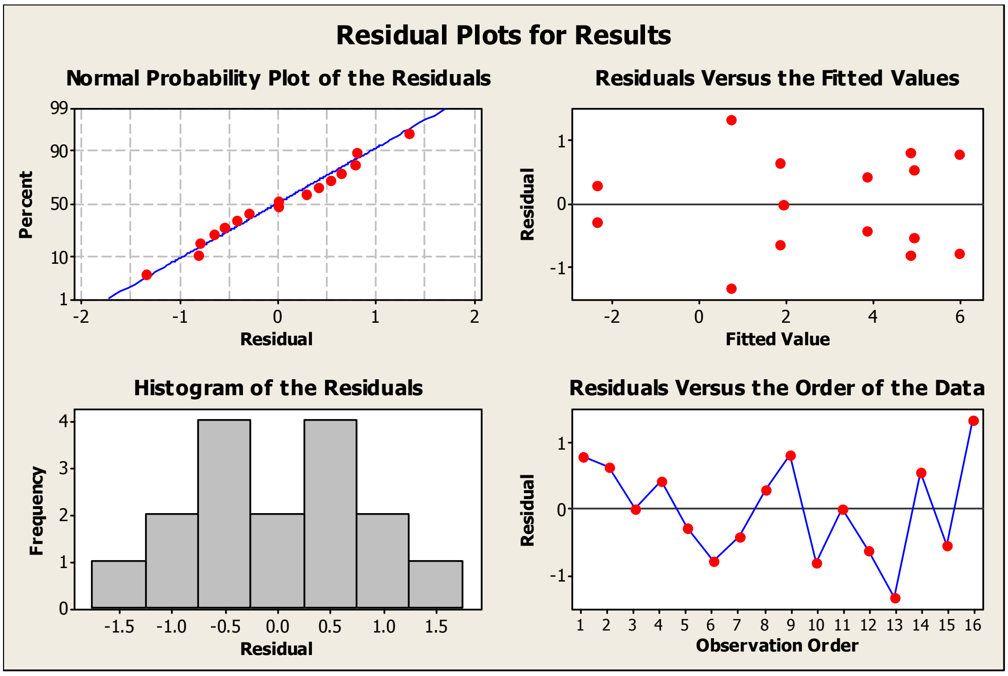
Effects Plot for Results

```
Alias Structure
I
A
B
D
A*B
A*D
B*D
A*B*D
```

De los resultados podemos notar que los efectos significativos fueron los efectos principales (A, B y D) y las interacciones AB y AD. Este resultado es exactamente igual al ejercicio anterior pero una vez se hubiesen eliminado los efectos de las interacciones no significativos. Comprobando este resultado analizamos los gráficos resultantes.



**Recuerde que aquí el efecto C corresponde al factor significativo D, por lo tanto, C=D y AC=AD.



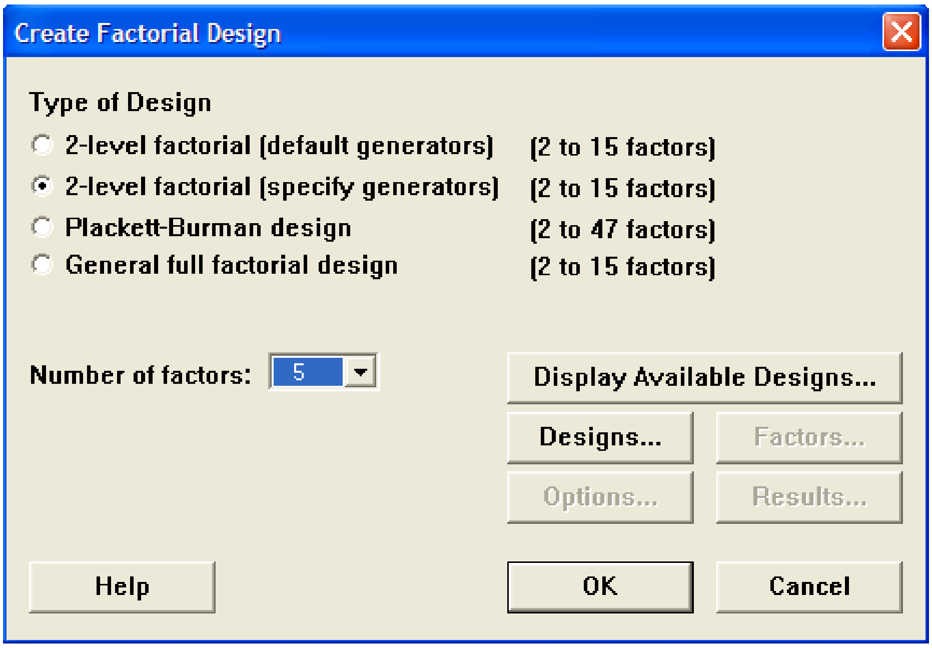
Ejemplo 2. tomado del libro "Design and Analysis of Experiments" de Douglas C. Montgomery, 6ta edición. Problema 8-6, pag. 336

Use un diseño 2^ (5-2) para investigar el efecto de A=condensación de temperatura, B= cantidad de material 1, C= volumen del solvente, D=tiempo de Condensación, y E=cantidad de material 2 en rendimiento. Los resultados obtenidos son como sigue:

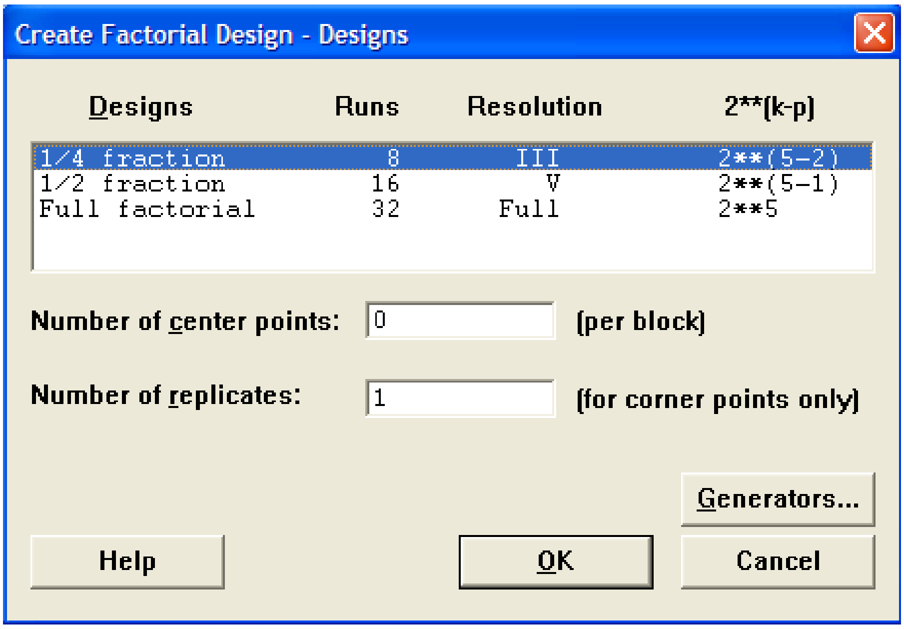
e= 23.2	ad=16.9	cd=23.8	bde=16.8
ab=15.5	bc=16.2	ace=23.4	abcde=18.1

(a) Verifique que los generadores del diseño utilizados son I=ACE and I=BDE.

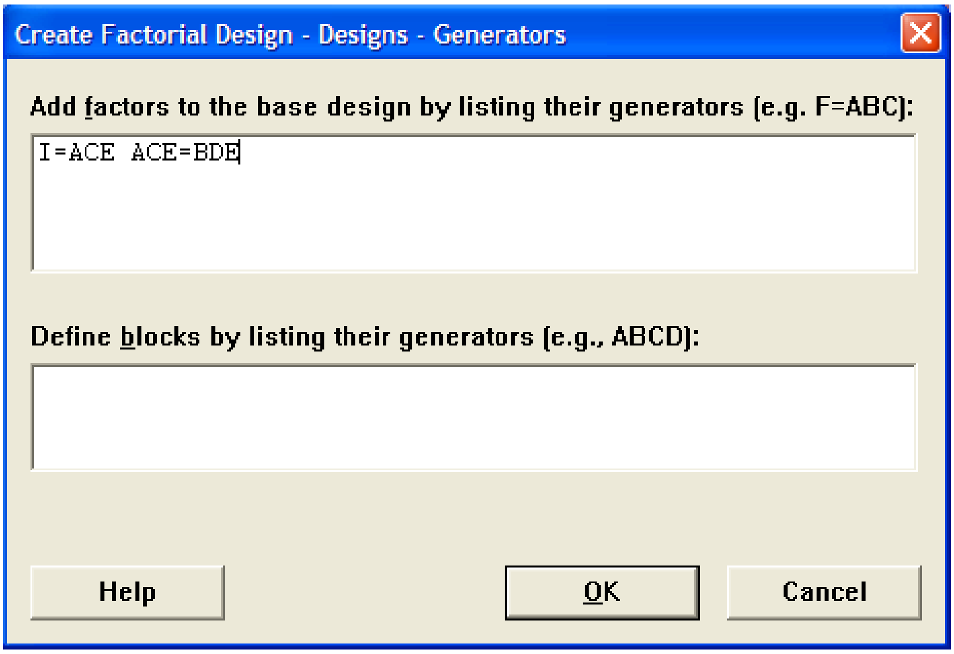
Este ejercicio se corre casi exactamente igual al anterior utilizando *Stat*, selecciona *DOE*, *Factorial* y luego *Create a Factorial Design*. La diferencia es que en vez de dejar que el software genere los generadores del experimento, los mismos se van a ingresar ya que son conocidos. Los pasos serían:



En la opción *Designs* se selecciona ¼ fraction.



Una vez en esta opción seleccionamos la opción de *Generators…*, para ingresar los generadores dados.



Los resultados son:

Fractional Factorial Design

```
Factors:  5   Base Design:         5, 8   Resolution:  III
Runs:     8   Replicates:             1   Fraction:    1/4
Blocks:   1   Center pts (total):     0

* NOTE * Some main effects are confounded with two-way interactions.

Design Generators: D = AB, E = AC

Alias Structure

I + ABD + ACE + BCDE
```

Por lo tanto, debo rehacer mi diseño para incluir los generadores deseados.

Fractional Factorial Design

```
Factors:  5   Base Design:         3, 8   Resolution:  III
Runs:     8   Replicates:             1   Fraction:    1/4
Blocks:   1   Center pts (total):     0

* NOTE * Some main effects are confounded with two-way interactions.

Design Generators: D = ABC, E = AC


Alias Structure (up to order 3)

I + ACE + BDE
```

(b) Escriba las relaciones y los aliases completes definidos para este diseño.

```
A = CE = BCD = ABDE
B = DE = ACD = ABCE
C = AE = ABD = BCDE
D = BE = ABC = ACDE
E = AC = BD = ABCDE
AB = CD = ADE = BCE
AD = BC = ABE = CDE
ABCD
```

(c) Estime los efectos principales.

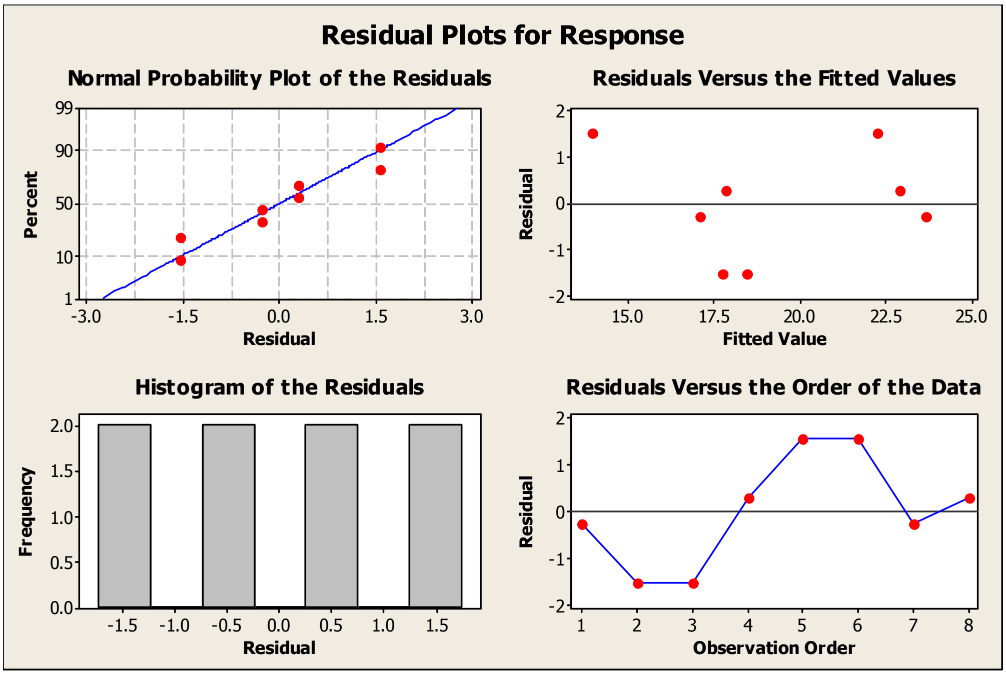
```
Estimated Effects and Coefficients for Response (coded units)

Term      Effect    Coef
Constant          19.238
A         -1.525  -0.763
B         -5.175  -2.588
C          2.275   1.138
D         -0.675  -0.337
E          2.275   1.138
A*B        1.825   0.913
A*D       -1.275  -0.637
```

(d) Prepare un análisis de la tabla de varianza. Verifique que las interacciones AB y AD están disponibles para usarse como error.

Factorial Fit: Response versus A, B, C, D, E

```
Estimated Effects and Coefficients for Response (coded units)

Term      Effect    Coef  SE Coef      T      P
Constant          19.238   0.7871  24.44  0.002
A         -1.525  -0.763   0.7871  -0.97  0.435
B         -5.175  -2.588   0.7871  -3.29  0.081
C          2.275   1.138   0.7871   1.45  0.285
D         -0.675  -0.337   0.7871  -0.43  0.710
E          2.275   1.137   0.7871   1.45  0.285


S = 2.22626   R-Sq = 88.95%   R-Sq(adj) = 61.34%


Analysis of Variance for Response (coded units)

Source          DF  Seq SS  Adj SS  Adj MS     F      P
Main Effects     5  79.826  79.826  15.965  3.22  0.254
Residual Error   2   9.913   9.913   4.956
Total            7  89.739
```

(e) Grafique los residuales versus los valores estimados. Además, construya una grafica de probabilidad normal de los residuales.



1. Experimento Gauge R & R.

Este tipo de experimento se usa para estudiar los componentes de variabilidad en un sistema de medida. Los componentes de usual interés son repetibilidad y reproducibilidad. La repetibilidad está asociada al instrumento, refleja la variación observada cuando la misma parte es medida por el mismo operador. La reproducibilidad refleja la variabilidad adicional en el sistema de medida, la cual resulta del uso del instrumento por el operador. El modelo esta dado por la ecuación I, la ecuación II muestra los componentes de varianza. Es el más sencillo y consiste en analizar un solo factor evaluado en diferentes niveles, de manera que se compara las medias de la respuesta en cada uno de esos niveles y se establece si hay diferencia entre ellas.

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \qquad \textbf{I}$$

Donde:

τ_i = Parte o la pieza que está siendo medida

β_j = Personas u operadores que miden las partes

$(\tau\beta)_{ij}$ = Interacción entre las piezas y el operador

ε_{ijk} = Error debido al instrumento de medida

En cuanto a los componentes de varianza tenemos:

$$\sigma_y^{\ 2} = \sigma_\tau^{\ 2} + \sigma_\beta^{\ 2} + \sigma_{\tau\beta}^{\ 2} + \sigma_\varepsilon^{\ 2} \qquad \textbf{II}$$

Donde:

$\sigma_\tau^{\ 2}$ = Componente de varianza para la parte o pieza

$\sigma_\beta^{\ 2}$ = Componente de varianza para el operador o persona

$\sigma_{\tau\beta}^{\ 2}$ = Componente de varianza para la interacción entre la persona y la pieza

$\sigma_\varepsilon^{\ 2}$ = Componente de varianza para el error

El interés de este tipo de experimento es saber cuanta varianza aporta cada uno de los componentes. Las hipótesis en cuestión se describen a continuación:

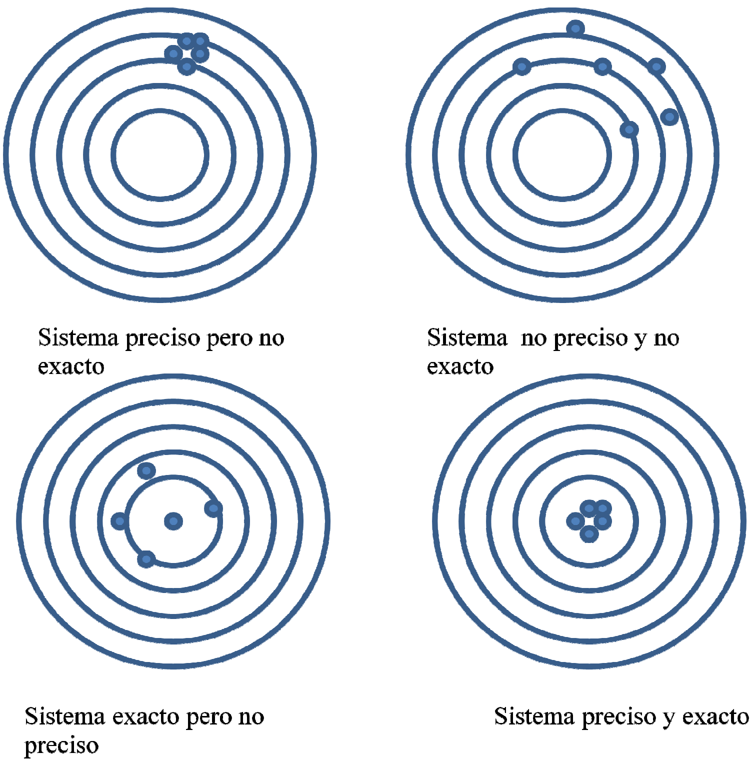
$H_0 : \sigma_\tau^{\ 2} = 0 \qquad H_1 : \sigma_\tau^{\ 2} \neq 0$

$H_0 : \sigma_\beta^{\ 2} = 0 \qquad H_1 : \sigma_\beta^{\ 2} \neq 0$

$H_0 : \sigma_{\tau\beta}^{\ 2} = 0 \qquad H_1 : \sigma_{\tau\beta}^{\ 2} \neq 0$

La aspiración máxima del experimento es que toda la variabilidad se deba a las piezas de manera que se pueda concluir que el instrumento es capaz de distinguir entre diferentes niveles de productos.

La calibración de un instrumento está asociada a la exactitud, la precisión está asociada al experimento Gauge R & R. A continuación se ilustran los conceptos de precisión y exactitud:



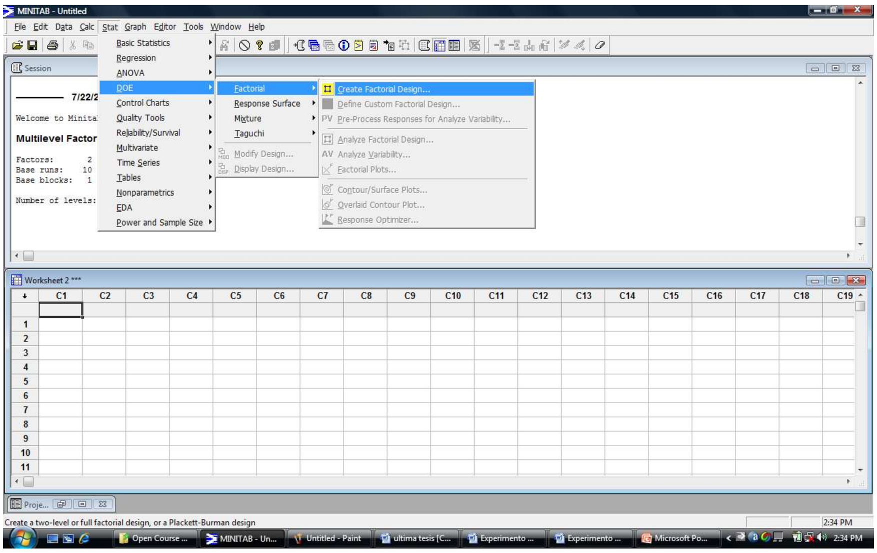
Este experimento es completamente aleatorio, es decir, además de que las corridas se deben realizar de manera aleatoria, los factores involucrados (piezas y personas) son aleatorios porque representan una muestra tomada de una población mayor sobre la cual se desea hacer inferencia.

Ejemplo 1

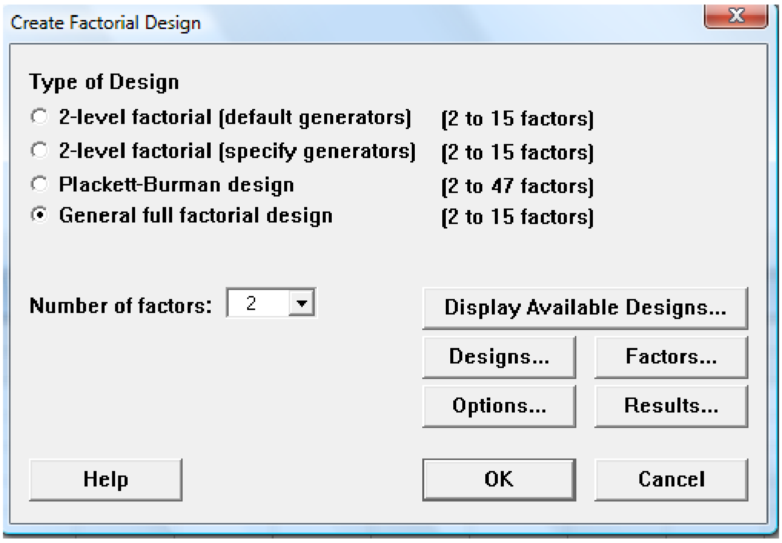
Para realizar la experimentación concerniente a la deshidratación de setas, el ingeniero del proceso de deshidratación de la empresa Mush, realizó un experimento para validar la balanza donde se pesan las mismas. Se tomo una balanza digital, se tomaron 5 pesas avaladas por el ANSI (American National Standards Institute). Los pesos a medir fueron de 100, 50, 20, 10 y 5 gramos (la balanza se uso para tomar pesos de las setas entre 25 y 100 gramos); las mediciones se hicieron por dos operarios y se realizaron 10 repeticiones. Con el fin de asegurar la aleatoriedad del experimento, se utilizo el programa Minitab.

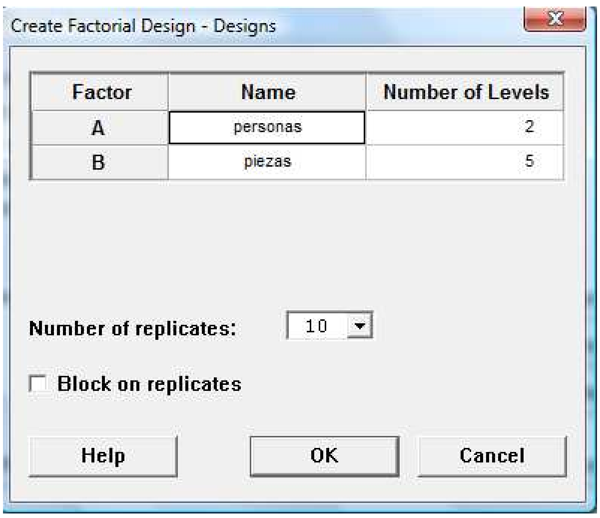
A continuación se presenta el procedimiento realizado por el experimentador para hacer los arreglos aleatorios:

1. Se busco la opción de crear un experimento factorial completo, asumiendo como factores los operarios y los diferentes pesos, donde los operarios son un factor con 2 niveles y los pesos son un factor con 5 niveles. La figura ilustra el procedimiento en Minitab:



2. Se hizo click en la opción create factorial design para obtener los arreglos aleatorios. La ventana desplegada se muestra en la siguiente figura, donde se escoge la opción de general full factorial design y se pone el número 2 en la casilla de number of factors, luego se hace click en la opción designs para especificar el tipo de diseño que se desea; en la casilla correspondiente al nombre del factor A se puso el nombre del factor personas, así mismo en la siguiente casilla se puso el nombre del factor piezas; luego en la casilla correspondiente al número de niveles por factor (number of levels), se puso dos niveles para las personas (porque son dos quienes van a tomar los pesos) y 5 niveles para las piezas (5, 10, 20, 50 y 100 gr). En la casilla correspondiente al número de replicas se puso un total de 10 que son las deseadas por el experimentador :





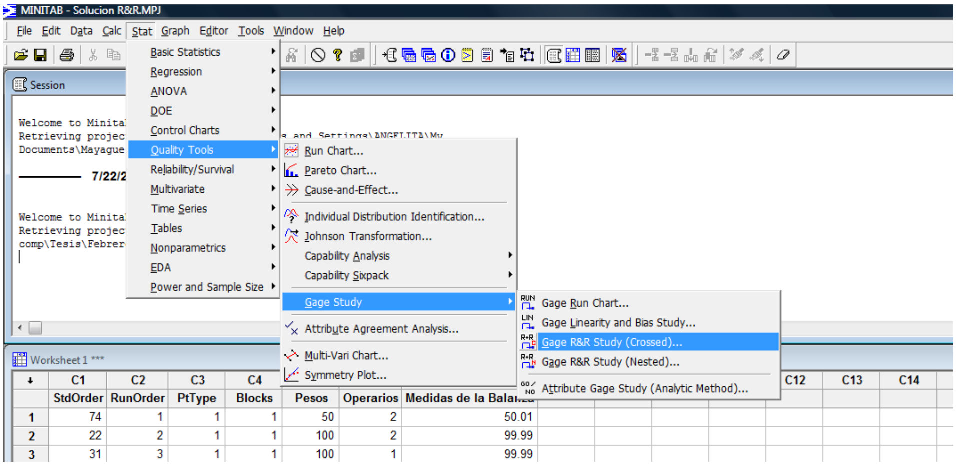
3. Al oprimir el botón de ok en las anteriores ventanas se obtiene entonces el siguiente arreglo. Minitab despliega en la columna de piezas valores del 1 al 5, para efectos de visualización, se cambiaron los valores de manera que se vieran los pesos. El valor de 1 corresponde al peso más alto (100) y el de 5 al más bajo (5). Se tomaron las medidas de acuerdo a los arreglos y se obtuvieron las respuestas ingresadas bajo la columna de Medidas de la Balanza:

StdOrder	RunOrder	PtType	Blocks	Piezas	Personas	Medidas de la Balanza
74	1	1	1	50	2	50.01
22	2	1	1	100	2	99.99
31	3	1	1	100	1	99.99
40	4	1	1	5	2	5.00
71	5	1	1	100	1	99.99
55	6	1	1	20	1	19.99
69	7	1	1	5	1	5.00
50	8	1	1	5	2	5.00
11	9	1	1	100	1	99.99
28	10	1	1	10	2	10.00
98	11	1	1	10	2	10.00
95	12	1	1	20	1	20.00
21	13	1	1	100	1	99.99
20	14	1	1	5	2	5.00
57	15	1	1	10	1	9.99
66	16	1	1	20	2	20.00
7	17	1	1	10	1	10.00
2	18	1	1	100	2	99.99
32	19	1	1	100	2	99.99
61	20	1	1	100	1	99.99
44	21	1	1	50	2	50.01
63	22	1	1	50	1	50.01
16	23	1	1	20	2	20.00
18	24	1	1	10	2	10.00
12	25	1	1	100	2	99.99
81	26	1	1	100	1	99.99
86	27	1	1	20	2	20.00
91	28	1	1	100	1	99.99
51	29	1	1	100	1	99.99
70	30	1	1	5	2	5.00
87	31	1	1	10	1	10.00

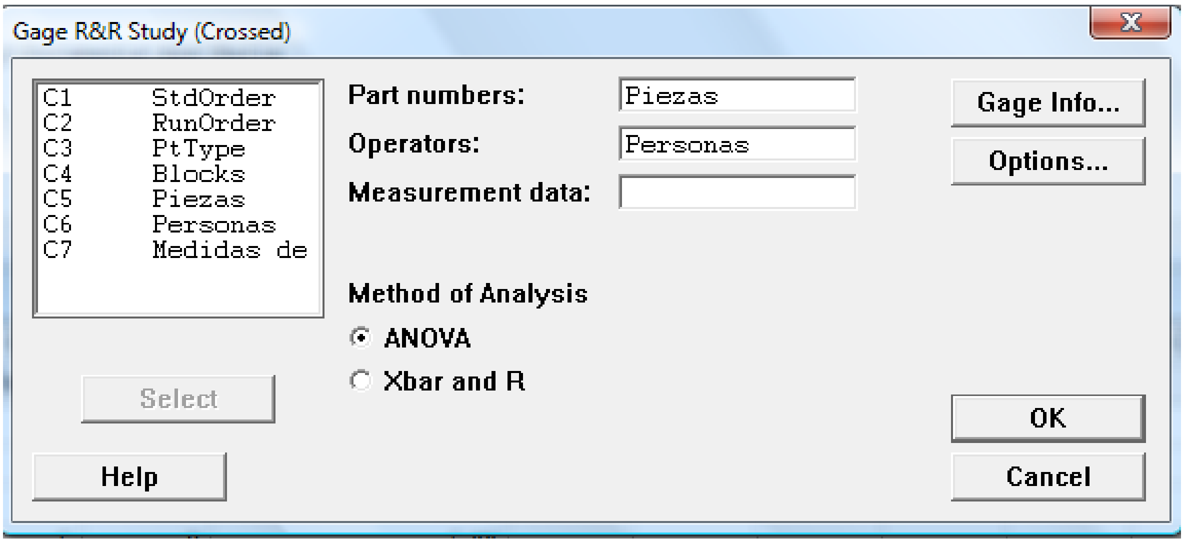
49	32	1	1	5	1	5.00
82	33	1	1	100	2	99.99
43	34	1	1	50	1	50.01
60	35	1	1	5	2	5.00
97	36	1	1	10	1	10.00
3	37	1	1	50	1	50.01
52	38	1	1	100	2	100.00
76	39	1	1	20	2	20.00
56	40	1	1	20	2	20.01
30	41	1	1	5	2	5.00
9	42	1	1	5	1	5.00
80	43	1	1	5	2	5.00
100	44	1	1	5	2	5.00
73	45	1	1	50	1	50.00
37	46	1	1	10	1	10.00
23	47	1	1	50	1	50.01
64	48	1	1	50	2	50.01
19	49	1	1	5	1	5.00
68	50	1	1	10	2	10.00
90	51	1	1	5	2	5.00
94	52	1	1	50	2	50.01
25	53	1	1	20	1	20.00
26	54	1	1	20	2	20.00
83	55	1	1	50	1	50.01
29	56	1	1	5	1	5.00
48	57	1	1	10	2	10.00
8	58	1	1	10	2	10.00
15	59	1	1	20	1	20.01
72	60	1	1	100	2	99.99
27	61	1	1	10	1	10.00
47	62	1	1	10	1	10.00
4	63	1	1	50	2	50.01
17	64	1	1	10	1	9.99
67	65	1	1	10	1	10.00
39	66	1	1	5	1	5.00
45	67	1	1	20	1	20.01
6	68	1	1	20	2	20.01
93	69	1	1	50	1	50.01
10	70	1	1	5	2	5.01
33	71	1	1	50	1	50.01
14	72	1	1	50	2	50.00

96	73	1	1	20	2	20.00
89	74	1	1	5	1	5.00
1	75	1	1	100	1	99.99
79	76	1	1	5	1	5.00
42	77	1	1	100	2	99.99
41	78	1	1	100	1	99.99
24	79	1	1	50	2	50.01
53	80	1	1	50	1	50.01
77	81	1	1	10	1	10.00
84	82	1	1	50	2	50.01
99	83	1	1	5	1	5.00
46	84	1	1	20	2	20.00
5	85	1	1	20	1	20.01
36	86	1	1	20	2	20.01
88	87	1	1	10	2	10.00
34	88	1	1	50	2	50.01
13	89	1	1	50	1	50.01
38	90	1	1	10	2	10.00
35	91	1	1	20	1	20.01
54	92	1	1	50	2	50.01
92	93	1	1	100	2	99.99
78	94	1	1	10	2	10.00
85	95	1	1	20	1	20.01
75	96	1	1	20	1	20.01
65	97	1	1	20	1	20.01
62	98	1	1	100	2	99.99
59	99	1	1	5	1	5.00
58	100	1	1	10	2	10.00

4. Luego para realizar el análisis de los datos se ingresa al menú de stat, quality tools, gauge study y luego se hace click en Gauge R & R study (crossed) como muestra la figura:



5. Al hacer click se despliega una pantalla donde en la primera casilla se ingresa la columna correspondiente a las piezas, en la segunda (operators) se ingresa la columna correspondiente a las personas que van a realizar el experimento, finalmente en la casilla de measurement data se ingresa la columna correspondiente a las respuestas (medidas de la balanza). Se hace click en la opción de anova para hacer el análisis de varianza.



6. Después de dar click en el botón de ok, se obtiene la siguiente respuesta:

Gage R&R Study - ANOVA Method
Two-Way ANOVA Table With Interaction

Source	DF	SS	MS	F	P
Piezas	4	123578	30894.5	1669974646	0.000
Personas	1	0	0.0	0	0.828
Piezas * Personas	4	0	0.0	1	0.233
Repeatability	90	0	0.0		
Total	99	123578			

Gage R&R

Source	VarComp	%Contribution (of VarComp)
Total Gage R&R	0.00	0.00
Repeatability	0.00	0.00
Reproducibility	0.00	0.00
Personas	0.00	0.00
Personas*Piezas	0.00	0.00
Part-To-Part	1544.73	100.00
Total Variation	1544.73	100.00

Se observa un valor P de 0 para las piezas, 0.828 para los operarios y de 0.233 para la interacción pesos-operarios. Estos valores permiten concluir que la hipótesis nula para las piezas se rechaza, es decir, la variabilidad del experimento se debe a la diferencia entre las piezas y la balanza entonces, tiene la capacidad de diferenciar entre varios tipos de piezas, alcanzando así el propósito del experimento, es decir que la balanza puede ser utilizada para medir objetos en un rango de 5 a 100 gramos con precisión. Los valores de P para los operarios y la interacción entre pesos y operarios muestran que estos no aportan una variación significativa al experimento.

En la figura se observa también la contribución de variación de cada uno de los componentes y se ratifica que la variación total se debe a las piezas.

Lo anterior muestra que la balanza es precisa. El experimentador observó que la calibración de la misma se hace manualmente, la balanza tiene en una esquina un dispositivo con una burbuja de aire que debe ser puesta en la mitad del círculo para asegurar la calibración.

2. Reglas para obtener las medias cuadradas esperadas (EMS: Expected mean squares)

1. El primer paso es realizar una tabla donde se escriben los términos del modelo, cada uno en una fila como muestra la figura:

Suscrito correspondiente al factor

A_i			
B_j			
AB_{ij}			
$E_{(ij)k}$			

2. El segundo paso es escribir los suscritos del modelo (i, j, k) como columnas en la tabla, encima de ellos se debe poner el tipo de factor, siendo F factor fijo y R factor aleatorio. Además de estos, se debe poner encima la letra correspondiente a los niveles del factor, en el caso del error se usa la letra n:

Niveles

Tipo de factor

Suscritos para el modelo

	a	**b**	**n**
	F	**R**	**R**
	i	**j**	**k**
$\mathbf{A_i}$			
$\mathbf{B_j}$			
$\mathbf{AB_{ij}}$			
$\mathbf{E_{(ij)k}}$			

3. El tercer paso es escribir para cada termino del modelo, los niveles y/o número de observaciones en aquellas casillas donde el suscrito de la fila no este en la columna:

	a	**b**	**n**
	F	**R**	**R**
	i	**j**	**k**
A_i		b	n
B_j	a		n
AB_{ij}			n
$E_{(ij)k}$			

Niveles

Tipo de factor

Suscritos para el modelo

4. En aquellos suscritos que estén en paréntesis en los términos del modelo, ponga un 1 en las columnas que contengan estos mismos suscritos:

	a	**b**	**n**
	F	**R**	**R**
	i	**j**	**k**
A_i		b	n
B_j	a		n
AB_{ij}			n
$E_{(ij)k}$	1	1	

Niveles

Tipo de factor

Suscritos para el modelo

5. Ahora se completa el resto de la tabla con 0 o 1 dependiendo si el suscrito representa un factor fijo (0) o aleatorio (1) :

Niveles

Tipo de factor

Suscritos para el modelo

	a	b	n
	F	**R**	**R**
	i	**j**	**k**
A_i	0	b	n
B_j	a	1	n
AB_{ij}	0	1	n
$E_{(ij)k}$	1	1	1

Obtención de las medias cuadradas esperadas (EMS)

a. Cubra las entradas de las columnas que ;contenga las letras del suscrito (que no están en paréntesis) en los términos del modelo. Por ejemplo, para A_i se cubre la columna i; para $\mathbf{E_{(ij)k}}$ se debe cubrir la columna k.

b. Teniendo cubierta la(s) columna(s), multiplique los restantes componentes de cada fila. Cada uno de esos productos es el coeficiente del termino correspondiente en el modelo, siempre y cuando el suscrito del término también se encuentre en el término al cual se le está determinando su media de cuadrados esperada. La suma de estos coeficientes, multiplicado por la varianza del término correspondiente (si el factor es fijo y   si el factor es aleatorio) es la media de cuadrados esperada para el término. Por ejemplo: para el A_i se cubre la columna i, los coeficientes de las columnas restantes estan dados por bn, n, n y 1, sin embargo la n correspondiente al termino B_j no se incluye porque el termino al que se le esta sacando el EMS (A_i) no contiene el suscrito j, de manera que esta n no se considera. El EMS para A_i seria entonces:

c. A continuacion se presenta el ejemplo anteriormente descrito paso a paso hasta completar el procedimiento:

Se comienza sacando las medias cuadradas esperadas para el error, tapando la columna k, siendo este el suscrito que no esta en paréntesis en el termino del modelo correspondiente al error:

	a **F** **i**	**b** **R** **j**		**EMS**
A_i	0	b		
B_j	a	1		
AB_{ij}	0	1		
$E_{(ij)k}$	1	1		σ^2

Se sigue con el término $\mathbf{Ab_{ij}}$ de manera que las columnas que se deben tapar son i y j, se procede con la multiplicación y se suma la media cuadrada del error. Para este caso se tiene una interacción de dos factores, uno fijo y otro aleatorio, donde fijo x aleatorio = aleatorio:

			n **R** **k**	**EMS**
A_i			n	
B_j			n	
AB_{ij}			n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{AB}$
$E_{(ij)k}$			1	σ^2

Ahora para el término $\mathbf{B_j}$ se tapa la columna j, y se repite los anteriores procedimientos. El EMS para el termino del modelo Ab_{ij} no se añade porque la multiplicación da como resultado 0.

	a **F** **i**		**n** **R** **k**	**EMS**
$\mathbf{A_i}$	0		n	
$\mathbf{B_j}$	a		n	$\sigma^2 + na\sigma_B^2$
$\mathbf{AB_{ij}}$	0		n	$\sigma^2 + n\sigma_{AB}^2$
$\mathbf{E_{(ij)k}}$	1		1	σ^2

Por ultimo el termino A_i , se tapa entonces la columna i y se realizan las multiplicaciones. El termino B_j no es tenido en cuenta porque A_i no contiene el suscrito j.

		b **R** **j**	**n** **R** **k**	**EMS**
$\mathbf{A_i}$		b	n	$\sigma^2 + n\sigma_{AB}^2 + bn\phi_A^2$
$\mathbf{B_j}$		1	n	$\sigma^2 + na\sigma_B^2$
$\mathbf{AB_{ij}}$		1	n	$\sigma^2 + n\sigma_{AB}^2$
$\mathbf{E_{(ij)k}}$		1	1	σ^2

Las flechas indican contra que se hacen las pruebas de cada termino para realizar la prueba F. en el caso de la interacción AB y el factor B se prueban contra el error al conducir la prueba F; el factor A se prueba contra la interacción AB.

		b R j	n R k	EMS
A_i		b	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{AB} + bn\phi^2_A$
B_j		1	n	$\sigma^2 + na\sigma^2_B$
AB_{ij}		1	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{AB}$
$E_{(ij)k}$		1	1	σ^2

Ejemplo 1 (Tomado del libro Design and analysis of Experiments, de Douglas C. Montgomery, 6 edición, página 523)

Considere un experimento factorial con cuatro factores, donde el factor A tiene a niveles, el factor B tiene b niveles, el factor C tiene c niveles, el factor D tiene d niveles y hay n replicas. Escriba las sumas de cuadrados, los grados de libertad y las medias cuadradas esperadas para los siguientes casos:

a) A, B, C, y D son factores fijos.

b) A, B, C, y D son factores aleatorios.

c) A es fijo y B, C, y D son aleatorios.

La suma de cuadrados y los grados de libertad son iguales para las partes a, b y c

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad
A	SS_A	a-1
B	SS_B	b-1
C	SS_C	c-1
D	SS_D	d-1
AB	SS_{AB}	(a-1)(b-1)
AC	SS_{AC}	(a-1)(c-1)
AD	SS_{AD}	(a-1)(d-1)
BC	SS_{BC}	(b-1)(c-1)
BD	SS_{BD}	(b-1)(d-1)
CD	SS_{CD}	(c-1)(d-1)
ABC	SS_{ABC}	(a-1)(b-1)(c-1)
ABD	SS_{ABD}	(a-1)(b-1)(d-1)
ACD	SS_{ACD}	(a-1)(c-1)(d-1)
BCD	SS_{BCD}	(b-1)(c-1)(d-1)
ABCD	SS_{ABCD}	(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)

a) Para el caso donde A, B, C, y D son factores fijos :

Componente de varianza para el factor fijo τ_i

Factores	F a i	F b j	F c k	F d l	R e m	EMS
τ_i	0	B	c	d	n	$\sigma^2 + [bcdn\ \Sigma\ \tau^2_i] / (a-1)$
β_j	a	0	c	d	n	$\sigma^2 + [acdn\ \Sigma\ \beta^2_j] / (b-1)$
γ_k	a	B	0	d	n	$\sigma^2 + [abdn\ \Sigma\ \gamma^2_k] / (c-1)$
δ_l	a	B	c	0	n	$\sigma^2 + [abcn\ \Sigma\ \delta^2_l] / (d-1)$
$(\tau\beta)_{ij}$	0	0	c	d	n	$\sigma^2 + [cdn\ \Sigma\Sigma\ (\tau\beta)^2_{ij}] / (a-1)\ (b-1)$
$(\tau\gamma)_{ik}$	0	B	0	d	n	$\sigma^2 + [bdn\ \Sigma\Sigma\ (\tau\gamma)^2_{ik}] / (a-1)\ (c-1)$
$(\tau\delta)_{il}$	0	B	c	0	n	$\sigma^2 + [bcn\ \Sigma\Sigma\ (\tau\delta)^2_{il}] / (a-1)\ (d-1)$
$(\beta\gamma)_{jk}$	a	0	0	d	n	$\sigma^2 + [adn\ \Sigma\Sigma\ (\beta\gamma)^2_{jk}] / (b-1)\ (c-1)$
$(\beta\delta)_{jl}$	a	0	c	0	n	$\sigma^2 + [acn\ \Sigma\Sigma\ (\beta\delta)^2_{jl}] / (b-1)\ (d-1)$
$(\gamma\delta)_{kl}$	a	B	0	0	n	$\sigma^2 + [abn\ \Sigma\Sigma\ (\gamma\delta)^2_{jl}] / (c-1)\ (d-1)$
$(\tau\beta\gamma)_{ijk}$	0	0	0	d	n	$\sigma^2 + [dn\ \Sigma\Sigma\Sigma\ (\tau\beta\gamma)^2_{ijl}] / (a-1)\ (b-1)\ (c-1)$
$(\tau\beta\delta)_{ijl}$	0	0	c	0	n	$\sigma^2 + [dn\ \Sigma\Sigma\Sigma\ (\tau\beta\delta)^2_{ijl}] / (a-1)\ (b-1)\ (d-1)$
$(\tau\gamma\delta)_{ikl}$	0	B	0	0	n	$\sigma^2 + [dn\ \Sigma\Sigma\Sigma\ (\tau\gamma\delta)^2_{ikl}] / (a-1)\ (c-1)\ (d-1)$
$(\beta\gamma\delta)_{jkl}$	a	0	0	0	n	$\sigma^2 + [dn\ \Sigma\Sigma\Sigma\ (\beta\gamma\delta)^2_{jkl}] / (b-1)\ (c-1)\ (d-1)$
$(\tau\beta\gamma\delta)_{ijkl}$	0	0	0	0	n	$\sigma^2 + [dn\ \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma\ (\tau\beta\gamma\delta)^2_{ijkl}] / (a-1)\ (b-1)\ (c-1)\ (d-1)$
$\varepsilon_{(ijkl)m}$	1	1	1	1	1	σ^2

b) Para el caso donde A, B, C, y D son factores aleatorios:

Factores	R a i	R b j	R c k	R d l	R e m	EMS
τ_i	1	b	c	D	n	$\sigma^2+n\sigma^2_{\tau\beta\gamma\delta}+bn\sigma^2_{\tau\gamma\delta}+cn\sigma^2_{\tau\beta\delta}+dn\sigma^2_{\tau\beta\gamma}+bcn\sigma^2_{\tau\delta}+bdn\sigma^2_{\tau\gamma}+cdn\sigma^2_{\tau\beta}+bcdn\sigma^2_{\tau}$
β_j	a	1	c	d	n	$\sigma^2+n\sigma^2_{\tau\beta\gamma\delta}+an\sigma^2_{\beta\gamma\delta}+cn\sigma^2_{\tau\beta\delta}+dn\sigma^2_{\tau\beta\gamma}+acn\sigma^2_{\beta\delta}+adn\sigma^2_{\beta\gamma}+cdn\sigma^2_{\tau\beta}+acdn\sigma^2_{\beta}$
γ_k	a	b	1	d	n	$\sigma^2+n\sigma^2_{\tau\beta\gamma\delta}+an\sigma^2_{\beta\gamma\delta}+dn\sigma^2_{\tau\beta\gamma}+abn\sigma^2_{\tau\delta}+adn\sigma^2_{\beta\gamma}+cn\sigma^2_{\tau\gamma}+abdn\sigma^2_{\delta}$
δ_l	a	b	c	1	n	$\sigma^2+n\sigma^2_{\tau\beta\gamma\delta}+an\sigma^2_{\beta\gamma\delta}+cn\sigma^2_{\tau\beta\delta}+abn\sigma^2_{\tau\delta}+acn\sigma^2_{\beta\delta}+bcn\sigma^2_{\tau\delta}+abcn\sigma^2_{\delta}$
$(\tau\beta)_{ij}$	1	1	c	d	n	$\sigma^2+n\sigma^2_{\tau\beta\gamma\delta}+cn\sigma^2_{\tau\beta\delta}+dn\sigma^2_{\tau\beta\gamma}+cdn\sigma^2_{\tau\beta}$
$(\tau\gamma)_{ik}$	1	b	1	d	n	$\sigma^2+n\sigma^2_{\tau\beta\gamma\delta}+bn\sigma^2_{\tau\gamma\delta}+dn\sigma^2_{\tau\beta\gamma}+bcn\sigma^2_{\tau\gamma}$
$(\tau\delta)_{il}$	1	b	c	1	n	$\sigma^2+n\sigma^2_{\tau\beta\gamma\delta}+bn\sigma^2_{\tau\gamma\delta}+cn\sigma^2_{\tau\beta\delta}+bcn\sigma^2_{\tau\delta}$
$(\beta\gamma)_{jk}$	a	1	1	d	n	$\sigma^2+n\sigma^2_{\tau\beta\gamma\delta}+an\sigma^2_{\beta\gamma\delta}+dn\sigma^2_{\tau\beta\delta}+adn\sigma^2_{\beta\gamma}$
$(\beta\delta)_{jl}$	a	1	c	1	n	$\sigma^2+n\sigma^2_{\tau\beta\gamma\delta}+an\sigma^2_{\beta\gamma\delta}+cn\sigma^2_{\tau\beta\delta}+acn\sigma^2_{\beta\delta}$
$(\gamma\delta)_{kl}$	a	b	1	1	n	$\sigma^2+n\sigma^2_{\tau\beta\gamma\delta}+an\sigma^2_{\beta\gamma\delta}+abn\sigma^2_{\gamma\delta}$
$(\tau\beta\gamma)_{ijk}$	1	1	1	d	n	$\sigma^2+n\sigma^2_{\tau\beta\gamma\delta}+dn\sigma^2_{\tau\beta\gamma}$
$(\tau\beta\delta)_{ijl}$	1	1	c	1	n	$\sigma^2+n\sigma^2_{\tau\beta\gamma\delta}+cn\sigma^2_{\tau\beta\delta}$
$(\tau\gamma\delta)_{ikl}$	1	b	1	1	n	$\sigma^2+n\sigma^2_{\tau\beta\gamma\delta}+bn\sigma^2_{\tau\gamma\delta}$
$(\beta\gamma\delta)_{jkl}$	a	1	1	1	n	$\sigma^2+n\sigma^2_{\tau\beta\gamma\delta}+an\sigma^2_{\beta\gamma\delta}$
$(\tau\beta\gamma\delta)_{ijkl}$	1	1	1	1	n	$\sigma^2+n\sigma^2_{\tau\beta\gamma\delta}$
$\varepsilon_{(ijkl)m}$	1	1	1	1	1	σ^2

c) Para el caso donde A es fijo y B, C, y D son aleatorios:

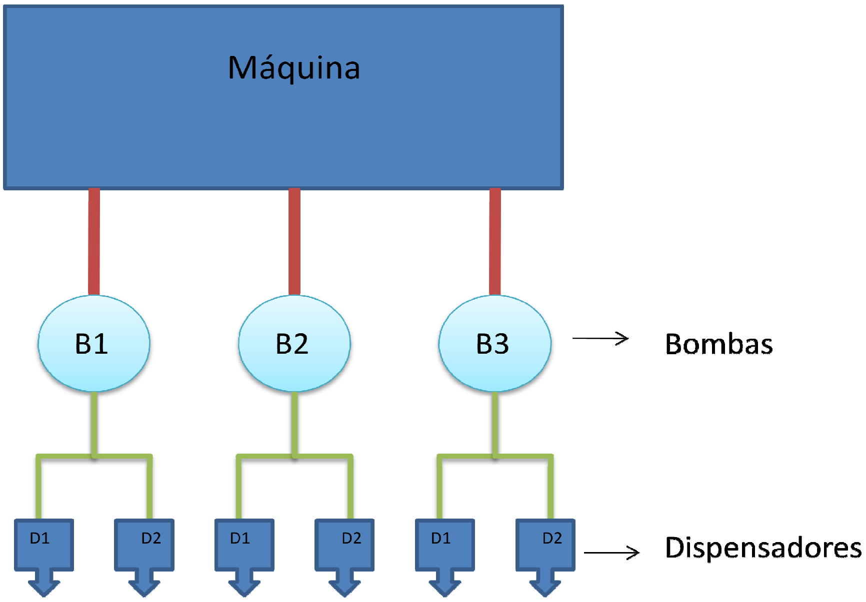
Factores	F a i	R b j	R c k	R d l	R e m	EMS
τ_i	0	b	c	d	n	$\sigma^2+n\sigma^2_{\tau\beta\gamma\delta}+bn\sigma^2_{\tau\gamma\delta}+cn\sigma^2_{\tau\beta\delta}+dn\sigma^2_{\tau\beta\gamma}+bcn\sigma^2_{\tau\delta}+bdn\sigma^2_{\tau\gamma}+cdn\sigma^2_{\tau\beta}+(bcdn\Sigma\tau^2_i)/(a-1)$
β_j	a	1	c	d	n	$\sigma^2+an\sigma^2_{\beta\gamma\delta}+acn\sigma^2_{\beta\delta}+adn\sigma^2_{\beta\gamma}+abdn\sigma^2_{\beta}$
γ_k	a	b	1	d	n	$\sigma^2+an\sigma^2_{\beta\gamma\delta}+abn\sigma^2_{\delta\gamma}+adn\sigma^2_{\beta\gamma}+abdn\sigma^2_{\delta}$
δ_l	a	b	c	1	n	$\sigma^2+an\sigma^2_{\beta\gamma\delta}+abn\sigma^2_{\delta\gamma}+acn\sigma^2_{\beta\delta}+abcn\sigma^2_{\delta}$
$(\tau\beta)_{ij}$	0	1	c	d	n	$\sigma^2+n\sigma^2_{\tau\beta\gamma\delta}+cn\sigma^2_{\tau\beta\delta}+dn\sigma^2_{\tau\beta\gamma}+cdn\sigma^2_{\tau\beta}$
$(\tau\gamma)_{ik}$	0	b	1	d	n	$\sigma^2+n\sigma^2_{\tau\beta\gamma\delta}+bn\sigma^2_{\tau\gamma\delta}+dn\sigma^2_{\tau\beta\gamma}+bdn\sigma^2_{\tau\gamma}$
$(\tau\delta)_{il}$	0	b	c	1	n	$\sigma^2+n\sigma^2_{\tau\beta\gamma\delta}+bn\sigma^2_{\tau\gamma\delta}+cn\sigma^2_{\tau\beta\delta}+bcn\sigma^2_{\tau\delta}$
$(\beta\gamma)_{jk}$	a	1	1	d	n	$\sigma^2+an\sigma^2_{\beta\gamma\delta}+adn\sigma^2_{\beta\gamma}$
$(\beta\delta)_{jl}$	a	1	c	1	n	$\sigma^2+an\sigma^2_{\beta\gamma\delta}+acn\sigma^2_{\beta\delta}$
$(\gamma\delta)_{kl}$	a	b	1	1	n	$\sigma^2+an\sigma^2_{\beta\gamma\delta}+abn\sigma^2_{\gamma\delta}$
$(\tau\beta\gamma)_{ijk}$	0	1	1	d	n	$\sigma^2+n\sigma^2_{\tau\beta\gamma\delta}+dn\sigma^2_{\tau\beta\gamma}$
$(\tau\beta\delta)_{ijl}$	0	1	c	1	n	$\sigma^2+n\sigma^2_{\tau\beta\gamma\delta}+cn\sigma^2_{\tau\beta\delta}$
$(\tau\gamma\delta)_{ikl}$	0	b	1	1	n	$\sigma^2+n\sigma^2_{\tau\beta\gamma\delta}+bn\sigma^2_{\tau\gamma\delta}$
$(\beta\gamma\delta)_{jkl}$	a	1	1	1	n	$\sigma^2+an\sigma^2_{\beta\gamma\delta}$

$(\tau\beta\gamma\delta)_{ijkl}$	0	1	1	1	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma\delta}$
$\varepsilon_{(ijkl)m}$	0	1	1	1	1	σ^2

1. EXPERIMENTOS ANIDADOS O JERARQUICOS “NESTED”

Existen ocasiones donde los niveles de un factor B son similares pero no idénticos para diferentes niveles del factor A. Es decir, diferentes niveles del factor A ven niveles del factor B que son similares para cada nivel del factor A pero por no ser idénticos, se encuentran anidados en el nivel al que correspondan para el factor A.

Para ilustrar lo descrito, suponga que tiene una máquina de refrescos compuesta de 3 bombas y cada una de ellas suple a dos dispensadores como muestra la figura:



En la figura se observa entonces un experimento anidado de dos niveles, esto porque los dispensadores componen un nivel del “nested” que están anidados en las bombas (que componen un segundo nivel) y ellas a su vez anidadas en la máquina. Allí se observa la teoría descrita ya que las bombas son componentes similares pero no iguales porque cada una de ellas tiene un funcionamiento independiente, y, de la misma manera, los dispensadores son un factor con componentes similares pero no idénticos; por este motivo si lo que se desea es analizar una respuesta con respecto a los factores bomba y dispensador, se debe hacer entonces un experimento anidado o jerárquico.

El modelo que describe estos experimentos es:

$$Y_{ijk} = \mu + M_i + B_{j(i)} + D_{k(ij)} + \varepsilon_{(ijk)l}$$

Donde:

$\mu = media\_general$
$M_i = Maquina$
$B_{j(i)} = Bomba$
$D_{k(ij)} = Dispensador$
$\varepsilon_{(ijk)l} = error$

i: corresponde al suscrito para la máquina que en el ejemplo corresponde a 1, si tuviera mas m'aquinas correspondería a 1…a

j(i): corresponde al suscrito de las bombas que en el ejemplo corresponde a j = 1, 2, 3 anidadas en i = 1 máquina. Si tuviera más bombas el suscrito seria j = 1…b

k(ij): corresponde al suscrito de los dispensadores k = 1,2 anidados en las bombas j y las máquinas i. Si tuviera más dispensadores k = 1…c

(ijk)l: corresponde al termino del error

Para realizar el experimento descrito anteriormente como uno tipo factorial, tendrían que cambiarse los dispensadores para las bombas cada vez que se haga una corrida, de manera que los dispensadores fueran los mismos dos para las 3 bombas. Esto resulta inútil ya que este tipo de maquinas requieren un arreglo como el que se describió anteriormente. De esta manera por ser éste un experimento anidado, no hay interacciones presentes entre los factores.

Suponiendo que adicional a la máquina presentada en la figura, se tiene otra más, la tabla de análisis de varianza para las dos maquinas, con 3 bombas cada una y cada bomba con dos dispensadores es:

Análisis de Varianza para un experimento anidado en 3 niveles

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Medias cuadradas esperadas para A y B fijos y C aleatorio
A (máquinas)	bcn $\sum_i (\bar{y}_{i...} - \bar{y}_{....})^2$	a-1	$\sigma^2 + n\sigma_c^{\ 2} + \frac{bcn\sum \tau_i^{\ 2}}{a-1}$
B (bombas dentro de A)	cn $\sum_i (\bar{y}_{ij..} - \bar{y}_{....})^2$	a(b-1)	$\sigma^2 + n\sigma_c^{\ 2} + \frac{cn\sum\sum \beta_{j(i)}^{\ \ 2}}{a(b-1)}$
C (dispensadores dentro de B)	n $\sum_i (\bar{y}_{ijk.} - \bar{y}_{....})^2$	ab(c-1)	$\sigma^2 + n\sigma_c^{\ 2}$
Error	$\sum_i\sum_j\sum_k\sum_l (\bar{y}_{ijkl} - \bar{y}_{ijk.})^2$	abc(n-1)	σ^2
Total	$\sum_i\sum_j\sum_k\sum_l (\bar{y}_{ijkl} - \bar{y}_{....})^2$	abcn-1	

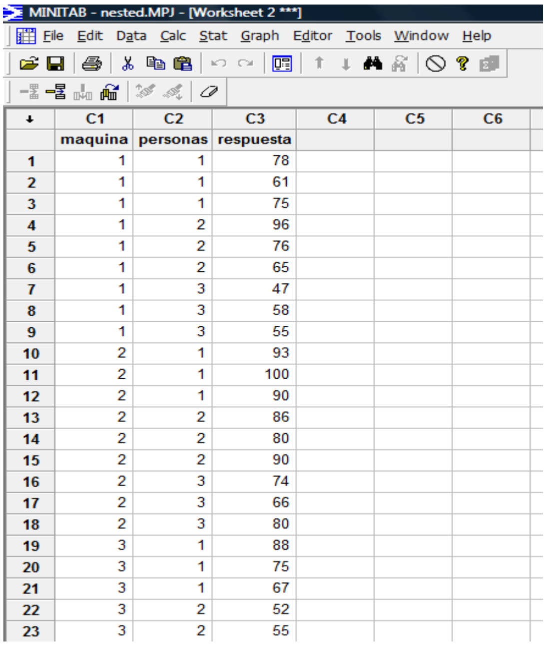
Ejemplo

Suponga que se está estudiando la dureza de la superficie de un material de acuerdo a 3 máquinas que se encuentran en 3 plantas de producción diferentes. Estas máquinas son operadas por 3 personas diferentes cada una que se escogieron de manera aleatoria. Cada persona que opera la máquina toma 3 medidas para la dureza del material. Se obtuvieron las siguientes respuestas:

	Máquina 1			Máquina 2			Máquina 3		
Personas	1	2	3	1	2	3	1	2	3
	78	96	47	93	86	74	88	52	43
	61	76	58	100	80	66	75	55	54
	75	65	55	90	90	80	67	50	63

A continuación se presenta el procedimiento en Minitab:

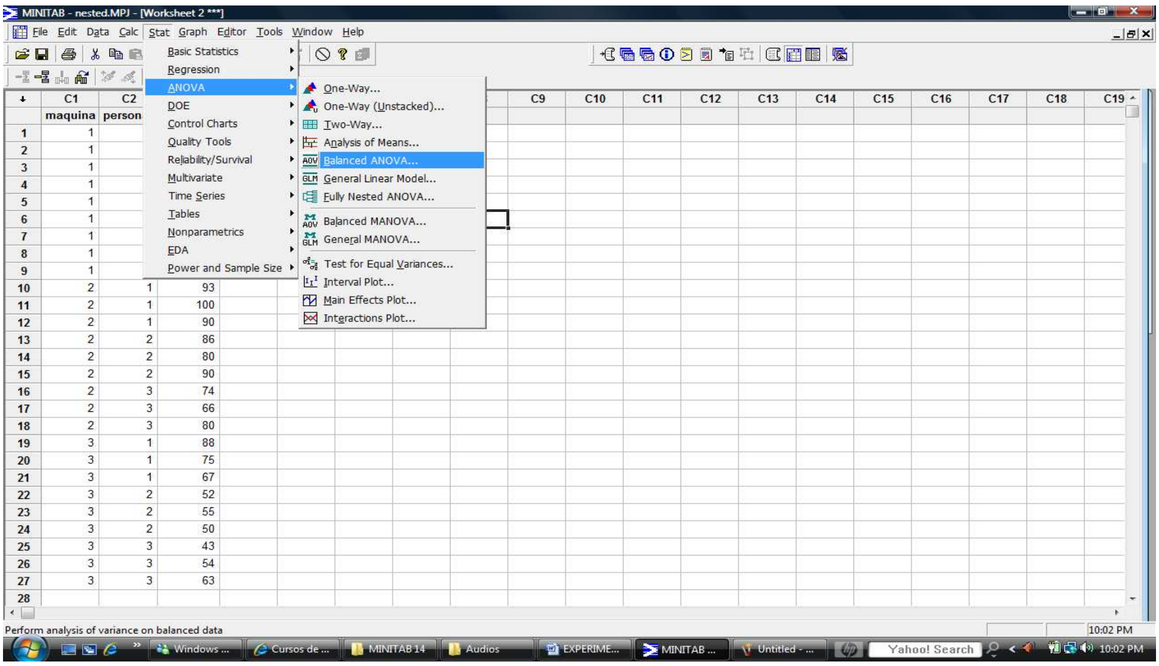
1. Se introducen los datos como muestra la grafica:



MINITAB - nested.MPJ - [Worksheet 2 ***]

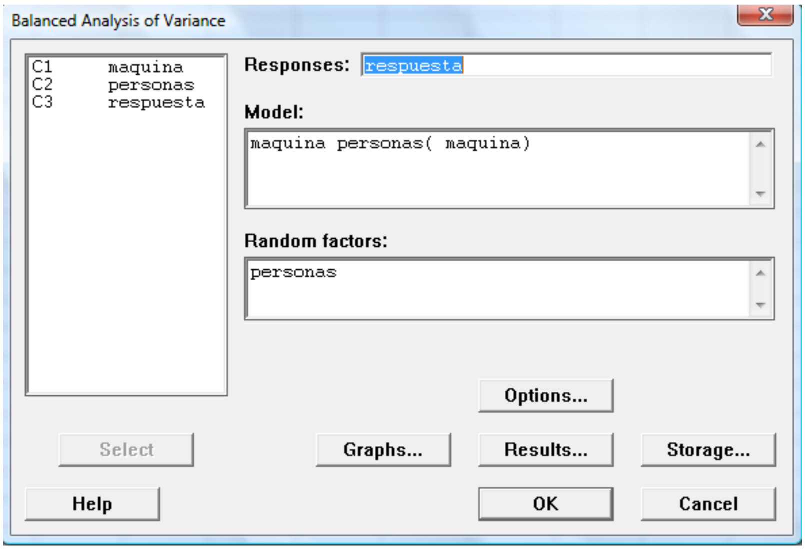
↓	C1 maquina	C2 personas	C3 respuesta	C4	C5	C6
1	1	1	78			
2	1	1	61			
3	1	1	75			
4	1	2	96			
5	1	2	76			
6	1	2	65			
7	1	3	47			
8	1	3	58			
9	1	3	55			
10	2	1	93			
11	2	1	100			
12	2	1	90			
13	2	2	86			
14	2	2	80			
15	2	2	90			
16	2	3	74			
17	2	3	66			
18	2	3	80			
19	3	1	88			
20	3	1	75			
21	3	1	67			
22	3	2	52			
23	3	2	55			

2. En el menú stat se hace click sobre la opción ANOVA y allí se hace click sobre la opción Balanced Anova como muestra la figura:

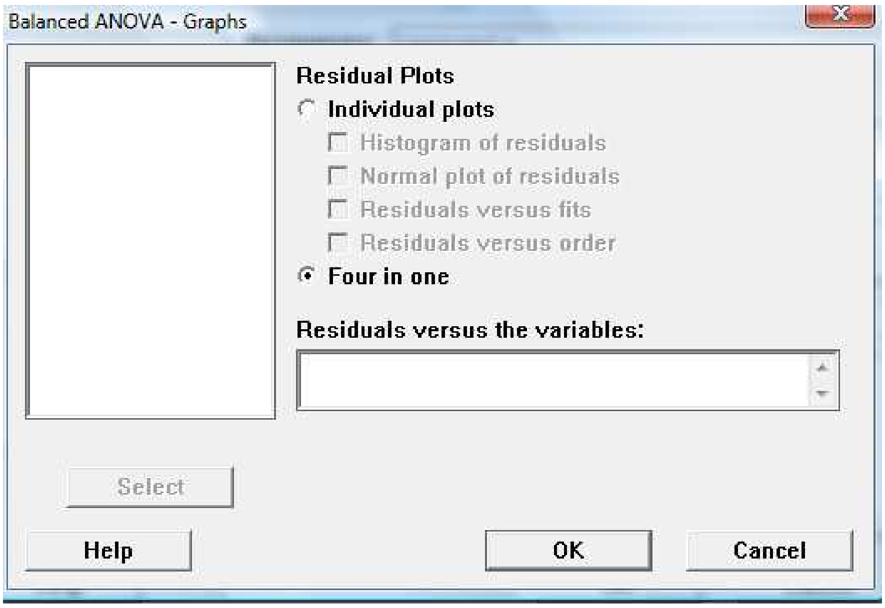


3. En la pantalla que se despliega se pone en la casilla responses la columna que contiene las respuestas, y, en la casilla Model, se pone la columna de máquina y la columna de personas. Nótese que después de la columna de personas se encuentra la columna de

máquinas entre paréntesis, esto indica a Minitab que las personas están anidadas dentro de las máquinas.



4. Al hacer click en el botón de graphs se despliega un menú de graficas, se hace click sobre la opción four in one de manera que se muestren las 4 graficas de los residuales en una. Se da ok a todas las pantallas y se obtienen los resultados.



5. Los resultados se muestran a continuación:

```
ANOVA: respuesta versus maquina, personas

Factor             Type    Levels  Values
maquina            fixed        3  1, 2, 3
personas(maquina)  random       3  1, 2, 3


Analysis of Variance for respuesta

Source             DF       SS       MS     F      P
maquina             2  2627.56  1313.78  2.77  0.141
personas(maquina)   6  2845.11   474.19  6.26  0.001
Error              18  1363.33    75.74
Total              26  6836.00


S = 8.70292   R-Sq = 80.06%   R-Sq(adj) = 71.19%
```

Se observa que no existe diferencia significativa en el factor máquinas a pesar de que las mismas se encuentran en diferentes plantas, sin embargo, se observa diferencia en las personas ya que su valor p es menor al nivel de significancia utilizado para la prueba (0.05). Debido a que hay diferencia entre las personas que operan las maquinas, el interés mayor es saber en qué máquina están difiriendo estas personas pero el análisis hecho con anterioridad no permite obtener esta información, ya que el mismo se realizó de manera global.

Para obtener un análisis por cada máquina se realiza entonces un análisis para un solo factor aleatorio para cada una de las maquinas. El factor en consideración para cada análisis es las personas con 3 niveles. En la sección correspondiente a un solo factor aleatorio de este material se muestra el procedimiento para la realización del mismo en Minitab, de manera que se procede a mostrar aquí los resultados.

1. Análisis de un solo factor aleatorio para la máquina 1:

```
One-way ANOVA: respuesta versus personas

Source    DF    SS   MS     F      P
personas   2  1042  521  4.32  0.069
Error      6   723  121
Total      8  1765

S = 10.98   R-Sq = 59.02%   R-Sq(adj) = 45.35%


                         Individual 95% CIs For Mean Based on
```

```
                           Pooled StDev
Level  N   Mean  StDev  -----+---------+---------+---------+----
1      3  71.33   9.07              (----------*---------)
2      3  79.00  15.72                   (----------*---------)
3      3  53.33   5.69  (----------*---------)
                        -----+---------+---------+---------+----
                            45        60        75        90
```

2. Análisis de un solo factor aleatorio para la máquina 2:

One-way ANOVA: respuesta m2 versus personas m2

```
Source        DF     SS     MS     F      P
personas m2    2  666.0  333.0  9.89  0.013
Error          6  202.0   33.7
Total          8  868.0

S = 5.802   R-Sq = 76.73%   R-Sq(adj) = 68.97%


                        Individual 95% CIs For Mean Based on
                        Pooled StDev
Level  N   Mean  StDev  -----+---------+---------+---------+----
1      3  94.33   5.13                      (-------*--------)
2      3  85.33   5.03             (-------*--------)
3      3  73.33   7.02  (-------*--------)
                        -----+---------+---------+---------+----
                            70        80        90       100

Pooled StDev = 5.80
```

3. Análisis de un solo factor aleatorio para la máquina 3:

One-way ANOVA: respuesta m3 versus Personas m3

```
Source        DF      SS     MS     F      P
Personas m3    2  1137.6  568.8  7.79  0.021
Error          6   438.0   73.0
Total          8  1575.6

S = 8.544   R-Sq = 72.20%   R-Sq(adj) = 62.93%


                          Individual 95% CIs For Mean Based on
                          Pooled StDev
Level  N    Mean   StDev  ---+---------+---------+---------+------
1      3  76.667  10.599                 (-------*-------)
2      3  52.333   2.517  (-------*-------)
3      3  53.333  10.017   (-------*-------)
                          ---+---------+---------+---------+------
                            45        60        75        90

Pooled StDev = 8.544
```

Se observa que al sumar la suma de cuadrados para el factor persona de cada una de las máquinas, se obtiene la suma de cuadrados total que se observa en el análisis global. Es decir: 1042+666+1137.6 = 2845.6.

Con los análisis realizados para un solo factor aleatorio se puede observar que hay diferencia significativa entre las personas de las máquinas 2 y 3. Sin embargo se podría decir que en la máquina uno también puede haber una diferencia entre las personas ya que el valor p no está muy lejano del nivel de significancia de la prueba (0.05).

2. Experimentos anidados cruzados o anidados factoriales

Hay ocasiones donde se tienen experimentos en que algunos factores están organizados de manera factorial y otros anidados dentro de alguno de estos factores factoriales. De manera entonces que en este tipo de experimentos hay interacción entre los factores factoriales.

El modelo para estos experimentos esta descrito por:

$$Y_{ijkl} = \mu + \tau_i + B_{j(i)} + y_{k(j)} + \tau\beta_{ij} + \tau y_{ik(j)} + \varepsilon_{(ijk)l}$$

Donde:

τ_i : Es el efecto del factor factorial A

β_j : Es el efecto del factor factorial B

$y_{k(j)}$: Es el efecto del factor C anidado en B

$\tau\beta_{ij}$: Es la interacción de los factores A y B

$\tau y_{ik(j)}$: Es la interacción entre el factor A y el factor C anidado en B

$\varepsilon_{(ijk)l}$: Es el error experimental

Ejemplo

Un profesor está estudiando la velocidad de ensamble de los alumnos al armar carritos con unos legos. El diseñó 3 formas de ensamblaje y dos estaciones de trabajo. Para la práctica selecciono 4 alumnos de manera aleatoria para asignarlos a la combinación entre forma de ensamble y estación de trabajo. Las estaciones de trabajo se ubicaron cada una en un salón de clase diferente, de manera que los cuatro alumnos seleccionados para cada trabajo son diferentes para cada estación. Para cada combinación se realizaron 2 replicas.

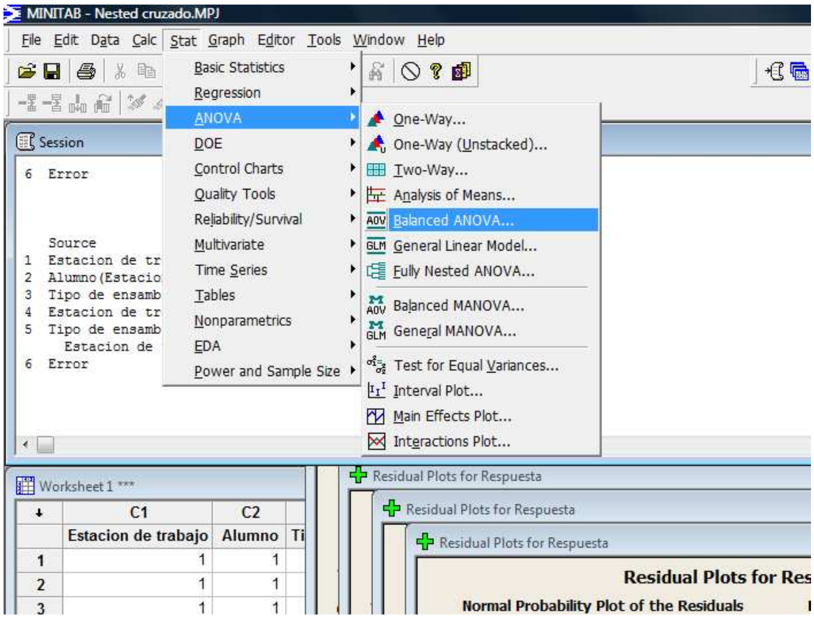
Debido a que los alumnos son diferentes para cada estación de trabajo, estos se van a encontrar anidados dentro de las estaciones de trabajo, pero como las tres formas de ensamble son las mismas para las dos estaciones de trabajo, estos dos factores son factoriales y por tanto pueden interactuar.

A continuación se presenta la tabla con las velocidades de ensamble para cada tratamiento:

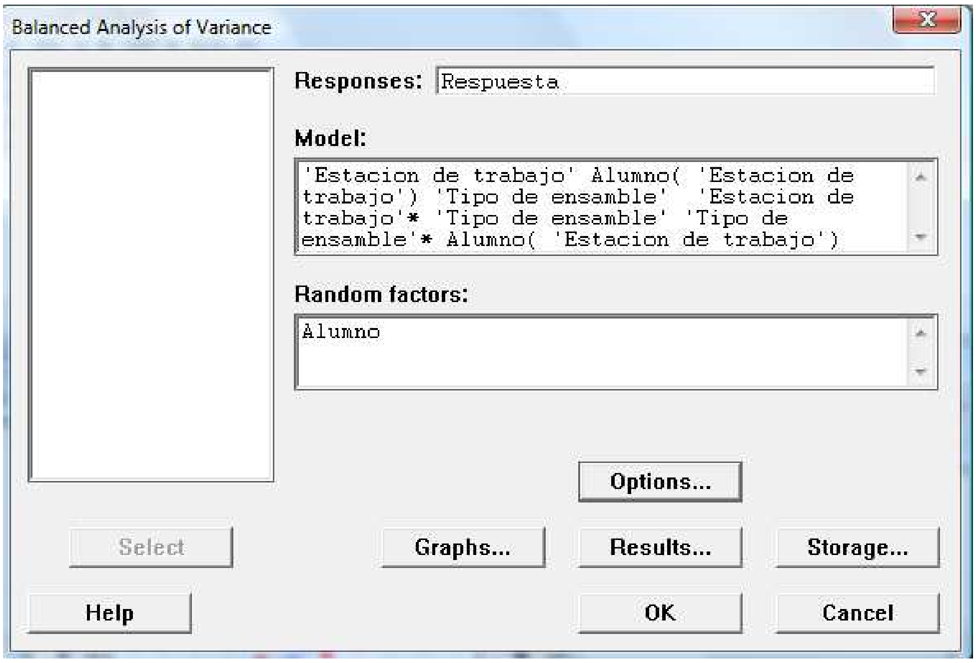
	Estación de trabajo 1				Estación de trabajo 2			
Alumno	1	2	3	4	1	2	3	4
Ensamble 1	22	23	28	25	26	27	28	24
	24	24	29	23	28	25	25	23
Ensamble 2	30	29	30	27	29	30	24	28
	27	28	32	25	28	27	23	30
Ensamble 3	25	24	27	26	27	26	24	28
	21	22	25	23	25	24	27	27

Una vez se tienen las respuestas al experimento se procede a realizar el análisis mediante el programa Minitab:

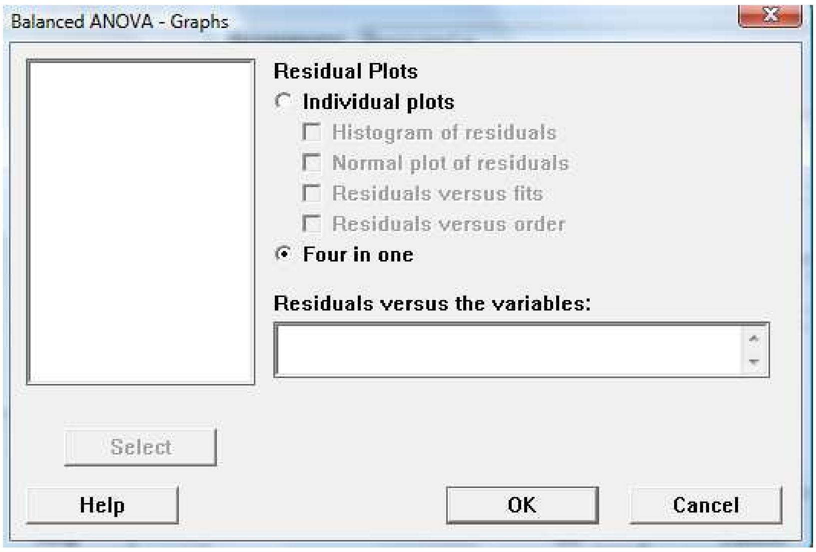
1. En el menú stat, se hace click sobre la opción ANOVA, allí se puede escoger para este caso, la opción Balanced Anova o General linear model, cualquiera de los dos funciona porque se tiene un diseño balanceado. En este caso haga click sobre la opción Balanced Anova como muestra la figura:



2. En la pantalla que se despliega (mostrada en la figura) se introduce el modelo. En la casilla de response se hace click a la columna de respuestas, en la casilla de model, se introducen las columnas correspondientes al modelo como se muestra en la figura. Observe que cuando se introduce el factor alumno, se pone entre parentecis las estaciones de trabajo, esto se hace para darle a entender a Minitab que los alumnos se encuentran anidados dentro de las estaciones de trabajo. También observe que se ponen interacciones entre los tipos de ensamble y las estaciones de trabajo porque ambas estaciones ven todos los tipos de ensamble, igualmente los alumnos de cada estación ven los mismos tipos de ensamble, de manera que estos interactúan. Sin embargo no hay interaccion entre las estaciones de trabajo y los alumnos porque los mismos varian para cada estación de trabajo, es decir, se encuentran anidados dentro de las estaciones. En la casilla de Random factors se pone el factor alumnos porque el interés del experimentador es hacer inferencia en una población mayor de los mismos:

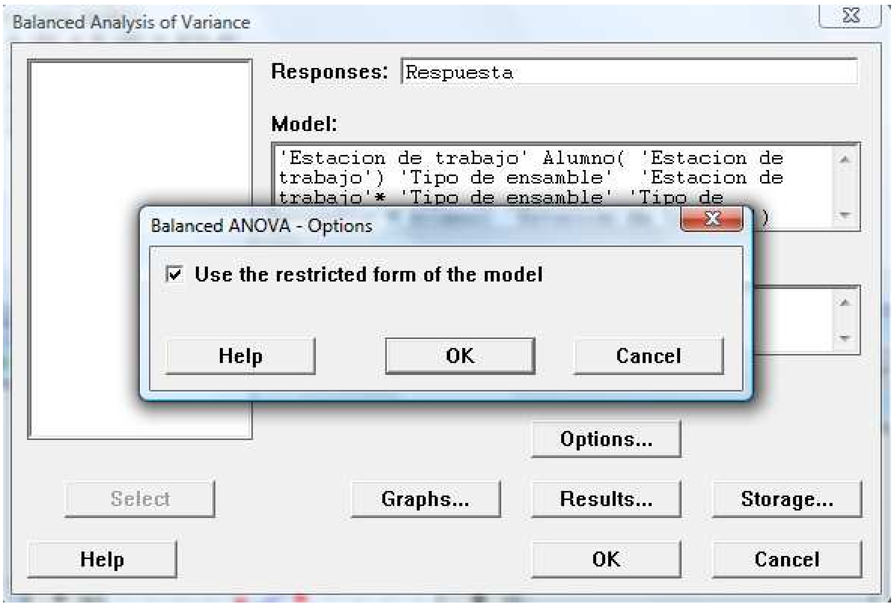


3. Al hacer click en el botón de graphs, se obtiene una pantalla donde se escoge la opción de four in one para que el programa muestre las 4 graficas para los residuales en una misma como muestra la figura. Una vez escogida la opción se da ok:



4. Al regresar a la pantalla principal, se hace click sobre el botón de options con el fin de que el programa despliegue la pantalla mostrada en la figura. En esta pantalla se de click sobre la casilla que dice Use the restricted form of the model para que entonces Minitab entienda que debe hacer el análisis considerando el modelo restringido. Esto quiere decir

que los cálculos para la estadística F se hacen presumiendo que los estimados de varianza que sean negativos son iguales a cero.



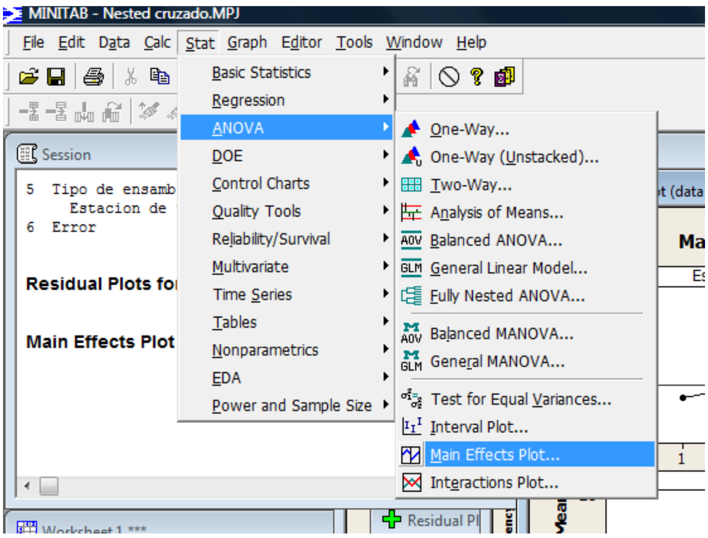
5. Al dar ok en la pantalla de la figura anterior, se regresa al menú principal donde se da de nuevo ok para obtener los siguientes resultados:

ANOVA: Respuesta versus Estacion de trabajo, Tipo de ensamble, Alumno

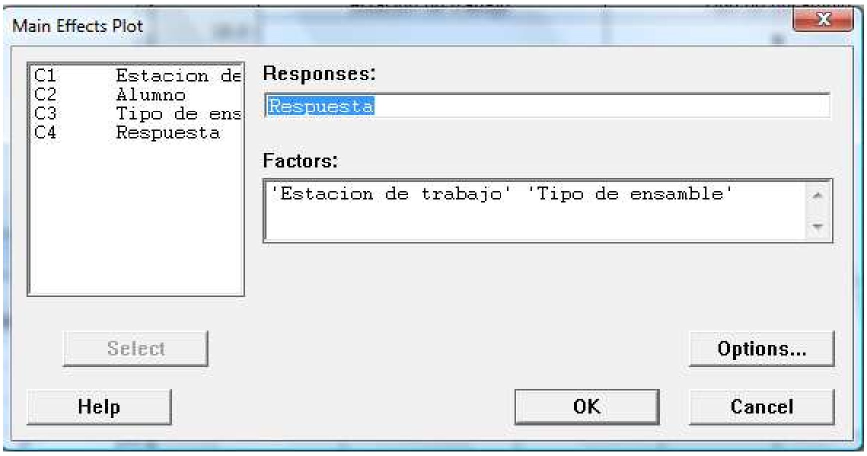
```
Factor                         Type    Levels  Values
Estacion de trabajo            fixed        2  1, 2
Alumno(Estacion de trabajo)    random       4  1, 2, 3, 4
Tipo de ensamble               fixed        3  1, 2, 3


Analysis of Variance for Respuesta

Source                               DF       SS      MS     F      P
Estacion de trabajo                   1    4.083   4.083  0.34  0.581
Alumno(Estacion de trabajo)           6   71.917  11.986  5.14  0.002
Tipo de ensamble                      2   82.792  41.396  7.55  0.008
Estacion de trabajo*Tipo de ensamble  2   19.042   9.521  1.74  0.218
Tipo de ensamble*Alumno(             12   65.833   5.486  2.35  0.036
  Estacion de trabajo)
Error                                24   56.000   2.333
Total                                47  299.667


S = 1.52753   R-Sq = 81.31%   R-Sq(adj) = 63.40%



                                        Variance  Error
   Source                              component   term
1  Estacion de trabajo                                2
```

```
2  Alumno(Estacion de trabajo)             1.609      6
3  Tipo de ensamble                                   5
4  Estacion de trabajo*Tipo de ensamble               5
5  Tipo de ensamble*Alumno(                1.576      6
     Estacion de trabajo)
6  Error                                   2.333

                                       Expected Mean Square
                                       for Each Term (using
   Source                              restricted model)
1  Estacion de trabajo                 (6) + 6 (2) + 24 Q[1]
2  Alumno(Estacion de trabajo)         (6) + 6 (2)
3  Tipo de ensamble                    (6) + 2 (5) + 16 Q[3]
4  Estacion de trabajo*Tipo de ensamble (6) + 2 (5) + 8 Q[4]
5  Tipo de ensamble*Alumno(            (6) + 2 (5)
     Estacion de trabajo)
6  Error                               (6)
```

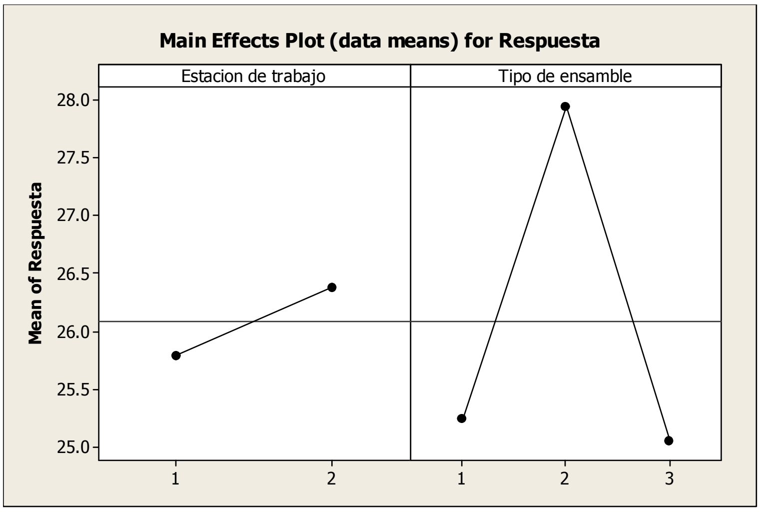
Se observa entonces que no existe diferencia significativa en la respuesta cuando se cambia la estación de trabajo, sin embargo, los factores alumnos dentro de las estaciones y los tipos de ensamble afectan la respuesta significativamente al cambiar sus niveles. Una forma de observar cuando disminuye el tiempo de ensamble, seria con la grafica de los efectos de los factores principales. Para obtener esta grafica se hace click sobre el menú stat, luego en ANOVA y en el menú que se despliega se hace click sobre Main Effects Plot (grafico de los efectos principales) como muestra la figura:



En la pantalla que se despliega, se pone la columna de respuestas en la casilla correspondiente a Responses y en la casilla de Factors se ponen los factores del modelo que son de tipo factorial. Una vez se hayan puesto los factores y la respuesta se da click en ok como muestra la figura:



Al dar ok se obtiene la siguiente grafica:



Aunque la diferencia entre las estaciones de trabajo no es significativa, se observa que la respuesta puede ser un poco más pequeña al trabajar en la estación 1. En cuanto a los tipos de ensamble, se observa que entre el tipo de ensamble 1 y 3 la diferencia de tiempo no es significativa, sin embargo, el tipo de ensamble 2 hace que la respuesta aumente considerablemente; de manera que se recomienda entonces utilizar el tipo de ensamble 1 o 3 en la estación de trabajo 1, aunque si es más económico usar la estación de trabajo 2, también puede ser usada sin afectar la respuesta. En cuanto a los operadores, se tendría que realizar un análisis similar al mostrado en la sección de experimentos anidados, es decir que se haría un análisis considerando las estaciones de trabajo por aparte.

1. Experimento Split-Plot (Parcelas o cuadrantes partidas/os):

Este tipo de experimento se utiliza cuando no existe la posibilidad de aleatorizar por completo el orden de las corridas. Maneja tratamientos que ocurren de manera simultánea incluso con algunas restricciones en la aleatoriedad. El modelo que describe este tipo de experimento es:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \gamma_k + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijk} \qquad \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, r \\ j = 1, 2, \ldots, a \\ k = 1, 2, \ldots, b \end{cases}$$

Donde:

τ_i = Bloques o replicas

β_j = Factor involucrado en el plot principal (A)

$\tau\beta_{ij}$ = Error del plot principal

γ_k = Factor involucrado en el sub-plot (B)

$(\tau\gamma)_{ik}$ = Replicas x factor (B)

$(\beta\gamma)_{ij}$ = Interacción entre los factores A y B

$(\tau\beta\gamma)_{ijk}$ = Error del sub-plot

Las hipótesis que se desean probar para este modelo son:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \ldots\tau_a \qquad\qquad Ho : \mu_1 = \mu_2 = \ldots\mu_a$$

Equivalente a

$$H_1 : \tau_1 \neq \tau_2 \neq \ldots\tau_a \qquad\qquad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \neq \ldots\mu_a$$

Donde τ es el efecto del tratamiento a y μ es la media del tratamiento a. La hipótesis alterna (hipótesis del investigador) busca probar que existe una diferencia entre los niveles de los factores en consideración, de manera que al variar el nivel, la respuesta varíe.

Ejemplo 1

Se desea analizar el largo de vida (Y) de componentes electrónicos al variar la temperatura (T) y el tiempo de horneado (H). Se analizan 4 niveles de temperatura y 3 niveles de tiempo de horneado. El experimentador decide hacer 3 réplicas. La siguiente tabla muestra las respuestas obtenidas para cada uno de los arreglos:

		Temperatura (grados centígrados)			
Réplica	**Tiempo (minutos)**	**580**	**600**	**620**	**640**
I	5	217	158	229	223
	10	233	138	186	227
	15	175	152	155	156
II	5	188	126	160	201
	10	201	130	170	181
	15	195	147	161	172
III	5	162	122	167	182
	10	170	185	181	201
	15	213	180	182	199

Análisis:

Este experimento podría conducirse como un factorial. Si se hiciera de esa manera, entonces el experimentador tendría que haber seleccionado una combinación de las cuatro temperaturas y los 3 tiempos de manera aleatoria, colocar un componente en el horno por el tiempo seleccionado y proseguir de esta manera hasta que todos los tratamientos fueran realizados. Se piensa entonces que al establecer una temperatura y tomar por ejemplo el tiempo de 15, se hubiera podido aprovechar y sacar el componente en un tiempo de 5 y uno de 10, de manera que se obtengan 3 respuestas en 15 minutos. Hacer esto es algo que un experimento de tipo factorial no permite. Si se realizara el experimento como uno factorial, se estaría desperdiciando tiempo y saldría más costoso.

Para esta situación, se establece el experimento Split-Plot porque permite manejar tratamientos de manera simultánea aun con restricciones en la aleatoriedad; para este ejemplo se restringiría la aleatoriedad del factor tiempo.

Una forma lógica de conducir este experimento, seria seleccionar una de las cuatro temperaturas de forma aleatoria y colocar tres componentes (diferentes unidades experimentales) para entonces analizarlos de acuerdo al tiempo asignado para cada componente; en otras palabras, a una temperatura dada (teniendo en cuenta que debe ser escogida de manera aleatoria) los 3 componentes son puestos en el horno por tres períodos de tiempo distintos. En este caso la temperatura actúa como cuadrante o parcela (Plot) y el tiempo es quien parte la parcela (Split). Luego la temperatura se ajusta a otro nivel y se repite éste procedimiento hasta que las cuatro temperaturas sean tomadas en consideración, a esto se le llama una replica del experimento (el ejemplo muestra 3).

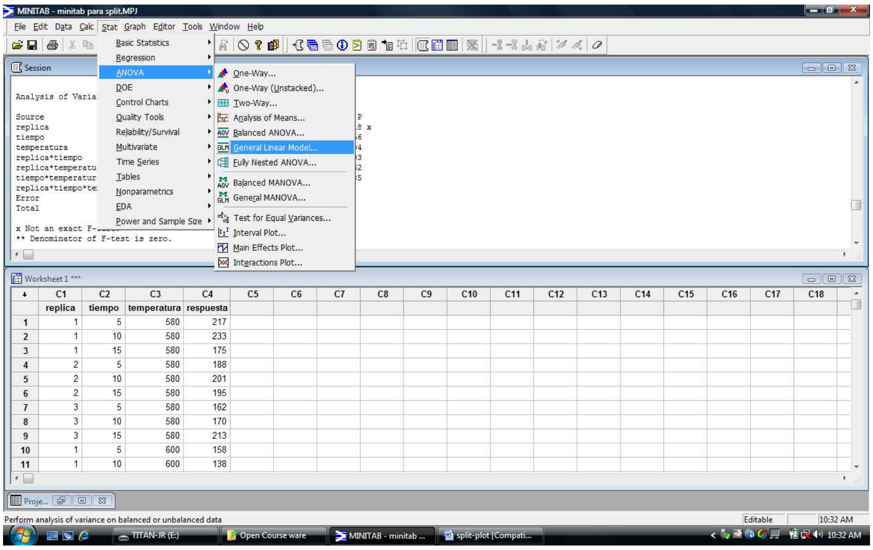
El modelo que describe el experimento esta dado por:

$$y_{ijk} = \underbrace{\mu + \tau_i + T_j + T\tau_{ij}}_{Parcela-completa} + \underbrace{TI_k + \tau TI_{ik} + TTI_{jk} + \tau TTI_{ijk}}_{Parcela-partida}$$

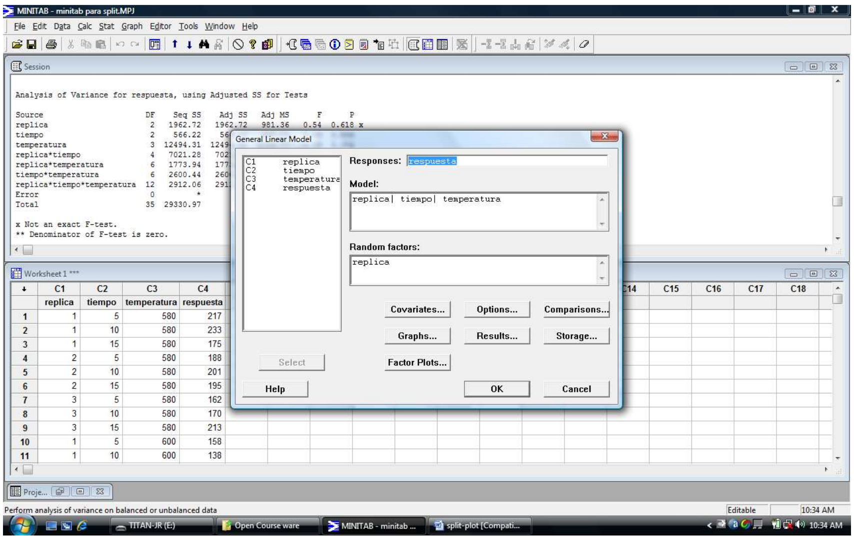
Donde τ_i es el efecto de las réplicas, T_j es el efecto de las temperaturas y TI_k es el efecto de los tiempos. Se podría pensar que el efecto de tiempo en este experimento se encuentra anidado dentro de las temperaturas, pero esto no es así ya que los mismos niveles de tiempo se efectúan en todas las temperaturas.

Para realizar el análisis de los datos, se procede entonces a realizar un análisis de varianza en el programa Minitab:

1. En el menú de stat, en la opción de anova se encuentra la opción de general linear model como muestra la figura:

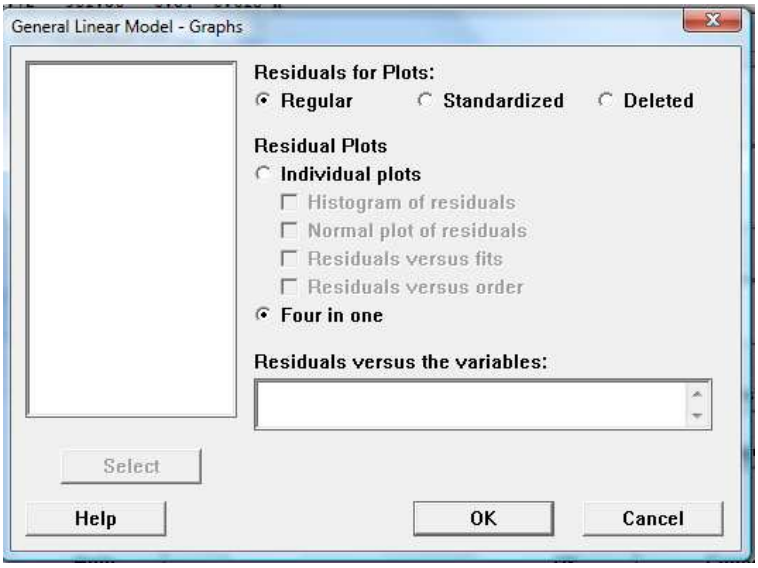


2. Al dar click se muestra la pantalla donde se ingresan los datos; en la casilla de responses se ingresa la columna de respuestas, en la casilla de model se ingresa el modelo, en el caso del Split plot se tiene interacción entre todos los factores (replica| tiempo| temperatura) donde el símbolo | hace que el programa entienda que hay interacción entre todos los factores. En la casilla de random factors se ingresa la columna correspondiente a las replicas porque es el único factor aleatorio, los demás son considerados fijos.



3. En la opción de graphs se pueden obtener los gráficos correspondientes a los residuales del modelo, allí se oprime como preferencia four in one con el fin de

que se muestre un solo grafico que contenga los 4 graficos del análisis de residuales:



4. Finalmente al dar clik en ok se obtiene la siguiente respuesta:

General Linear Model: respuesta versus replica, tiempo, temperatura

```
Factor       Type    Levels  Values
replica      random       3  1, 2, 3
tiempo       fixed        3  5, 10, 15
temperatura  fixed        4  580, 600, 620, 640


Analysis of Variance for respuesta, using Adjusted SS for Tests

Source                      DF    Seq SS    Adj SS   Adj MS      F      P
replica                      2   1962.72   1962.72   981.36   0.54  0.618 x
tiempo                       2    566.22    566.22   283.11   0.16  0.856
temperatura                  3  12494.31  12494.31  4164.77  14.09  0.004
replica*tiempo               4   7021.28   7021.28  1755.32   7.23  0.003
replica*temperatura          6   1773.94   1773.94   295.66   1.22  0.362
tiempo*temperatura           6   2600.44   2600.44   433.41   1.79  0.185
replica*tiempo*temperatura  12   2912.06   2912.06   242.67     **
Error                        0         *         *        *
Total                       35  29330.97

x Not an exact F-test.
** Denominator of F-test is zero.
* NOTE * Could not graph the specified residual type because MSE = 0 or the
         degrees of freedom for error = 0.
```

Teniendo en cuenta un nivel de significancia de 0.05 que es el que asume Minitab, se nota que el único factor que afecta la respuesta al cambiar sus niveles es el factor temperatura, esto porque el valor p es menor al valor de significancia (0.004 < 0.005). El efecto que causan las replicas no es de interés ya que las mismas se hacen para reducir el error experimental. El resultado muestra también que no se realizaron gráficos para los residuales debido a que los estimados del error son 0.

Ejemplo 2

Se desea saber bajo que condiciones se da mejor la deshidratación de setas *Pleurotus pulmonarius*. Para la experimentación se utilizó una caja de cartón con una parrilla donde se ubicaron las setas. Se realizó la experimentación teniendo en cuenta 3 variables de entrada o factores:

1. Focos: Se realizaron pruebas con 2 tipos de focos, uno de 40 vatios y otro de 60 vatios.
2. Diedrita: Esta es una piedra que absorbe la humedad. Se localizó en la entrada de aire de la caja y se hizo la experimentación con y sin diedrita.
3. Ventilación: Se tuvo en cuenta aire inducido por un ventilador y sin el mismo.

Se desea saber como cambia el peso de las setas teniendo en cuenta tiempos de intervalos de 5 horas, comenzando en 5 y terminando en 30. Para el mismo se estableció la realización de 2 replicas.

Por lo anterior, el experimento fue conducido como un Split-Plot. En este caso en particular se tienen 3 factores en el Plot (focos, diedrita y ventilación), cada uno con dos niveles (40 y 60 vatios, con diedrita y sin diedrita, con ventilación y sin ventilación). Se realizó una asignación aleatoria para los factores del Plot mediante el programa Minitab. El tiempo fue tomado como el factor Split el cual no fue asignado aleatoriamente ya que la intención es no perder información. Se presenta las siguientes tablas con el fin de ilustrar el experimento y proveer información sobre las respuestas obtenidas después de haber realizado la experimentación. La primera tabla se da para visualización del modelo; la segunda tabla ilustra la entrada de los datos en el programa Minitab.

Plot o parcela con 3 factores

Split

		Con ventilación				Sin ventilación			
		Con diedrita		Sin diedrita		Con diedrita		Sin diedrita	
	Tiempo en horas	40 voltios	60 voltios	40 voltios	60 voltios	40 voltios	60 voltios	40 voltios	60 voltios
Replica 1	5								
	10								
	15								
	20								
	25								
	30								
Replica 2	5								
	10								
	15								
	20								
	25								
	30								

Datos ingresados al programa Minitab

StdOrder	RunOrder	CenterPt	Réplica	Tiempo	Ventilación	Diedrita	Focos	Peso
14	1	1	1	5	1	-1	1	6.07
14	1	1	1	10	1	-1	1	3.55
14	1	1	1	15	1	-1	1	3.97
14	1	1	1	20	1	-1	1	3.88
14	1	1	1	25	1	-1	1	3.65
14	1	1	1	30	1	-1	1	3.71
2	2	1	1	5	1	-1	-1	16.14
2	2	1	1	10	1	-1	-1	7.43
2	2	1	1	15	1	-1	-1	4.32
2	2	1	1	20	1	-1	-1	4.46
2	2	1	1	25	1	-1	-1	3.97
2	2	1	1	30	1	-1	-1	4.62
12	3	1	1	5	1	1	-1	15.53
12	3	1	1	10	1	1	-1	4.33
12	3	1	1	15	1	1	-1	4.75
12	3	1	1	20	1	1	-1	4.36
12	3	1	1	25	1	1	-1	4.26
12	3	1	1	30	1	1	-1	4.26
8	4	1	1	5	1	1	1	12.31
8	4	1	1	10	1	1	1	6.5
8	4	1	1	15	1	1	1	5.38
8	4	1	1	20	1	1	1	5.16
8	4	1	1	25	1	1	1	4.45
8	4	1	1	30	1	1	1	5.08
10	5	1	2	5	1	-1	-1	11.61
10	5	1	2	10	1	-1	-1	4.14
10	5	1	2	15	1	-1	-1	3.5
10	5	1	2	20	1	-1	-1	3.11
10	5	1	2	25	1	-1	-1	2.98
10	5	1	2	30	1	-1	-1	3.09
9	6	1	1	5	-1	-1	-1	11.74
9	6	1	1	10	-1	-1	-1	3.76
9	6	1	1	15	-1	-1	-1	4.4
9	6	1	1	20	-1	-1	-1	4.09
9	6	1	1	25	-1	-1	-1	4.23
9	6	1	1	30	-1	-1	-1	4.52
4	7	1	2	5	1	1	-1	12.5
4	7	1	2	10	1	1	-1	4.88
4	7	1	2	15	1	1	-1	4.93
4	7	1	2	20	1	1	-1	4.21
4	7	1	2	25	1	1	-1	5.2
4	7	1	2	30	1	1	-1	4.67
1	8	1	2	5	-1	-1	-1	13.19
1	8	1	2	10	-1	-1	-1	5.73
1	8	1	2	15	-1	-1	-1	5.73
1	8	1	2	20	-1	-1	-1	5.64

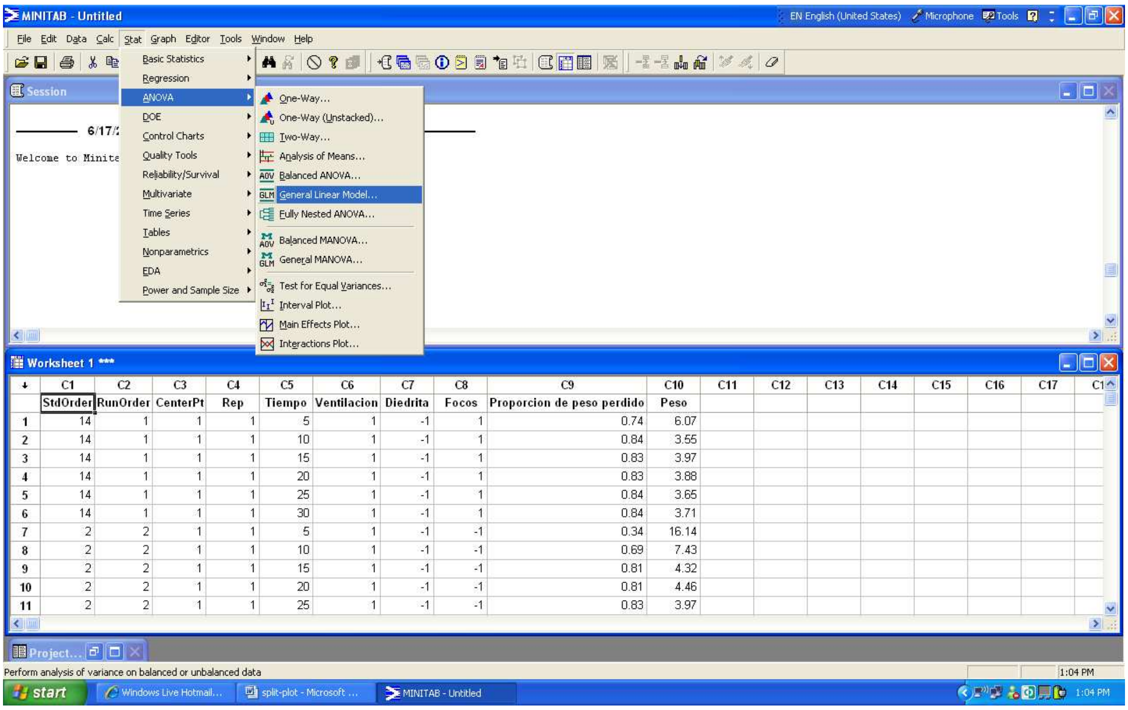
1	8	1	2	25	-1	-1	-1	5.29
1	8	1	2	30	-1	-1	-1	4.66
11	9	1	1	5	-1	1	-1	14.59
11	9	1	1	10	-1	1	-1	5.5
11	9	1	1	15	-1	1	-1	4.68
11	9	1	1	20	-1	1	-1	4.4
11	9	1	1	25	-1	1	-1	4.07
11	9	1	1	30	-1	1	-1	4.51
6	10	1	2	5	1	-1	1	6.09
6	10	1	2	10	1	-1	1	3.95
6	10	1	2	15	1	-1	1	3.73
6	10	1	2	20	1	-1	1	3.8
6	10	1	2	25	1	-1	1	3.69
6	10	1	2	30	1	-1	1	3.71
3	11	1	2	5	-1	1	-1	14.56
3	11	1	2	10	-1	1	-1	4.38
3	11	1	2	15	-1	1	-1	3.89
3	11	1	2	20	-1	1	-1	3.77
3	11	1	2	25	-1	1	-1	3.65
3	11	1	2	30	-1	1	-1	3.9
13	12	1	1	5	-1	-1	1	9.53
13	12	1	1	10	-1	-1	1	4.52
13	12	1	1	15	-1	-1	1	4.54
13	12	1	1	20	-1	-1	1	4.08
13	12	1	1	25	-1	-1	1	4.19
13	12	1	1	30	-1	-1	1	4.21
15	13	1	1	5	-1	1	1	11.09
15	13	1	1	10	-1	1	1	5.13
15	13	1	1	15	-1	1	1	5.49
15	13	1	1	20	-1	1	1	5.05
15	13	1	1	25	-1	1	1	5.05
15	13	1	1	30	-1	1	1	4.38
7	14	1	2	5	-1	1	1	10.47
7	14	1	2	10	-1	1	1	4.44
7	14	1	2	15	-1	1	1	4.59
7	14	1	2	20	-1	1	1	4.77
7	14	1	2	25	-1	1	1	4.64
7	14	1	2	30	-1	1	1	4.38
16	15	1	2	5	1	1	1	12.65
16	15	1	2	10	1	1	1	4.82
16	15	1	2	15	1	1	1	4.83
16	15	1	2	20	1	1	1	4.83
16	15	1	2	25	1	1	1	5.01
16	15	1	2	30	1	1	1	4.89
5	16	1	2	5	-1	-1	1	9.37
5	16	1	2	10	-1	-1	1	4.43
5	16	1	2	15	-1	-1	1	4.68
5	16	1	2	20	-1	-1	1	4.64

5	16	1	2	25	-1	-1	1	4.73
5	16	1	2	30	-1	-1	1	4.66

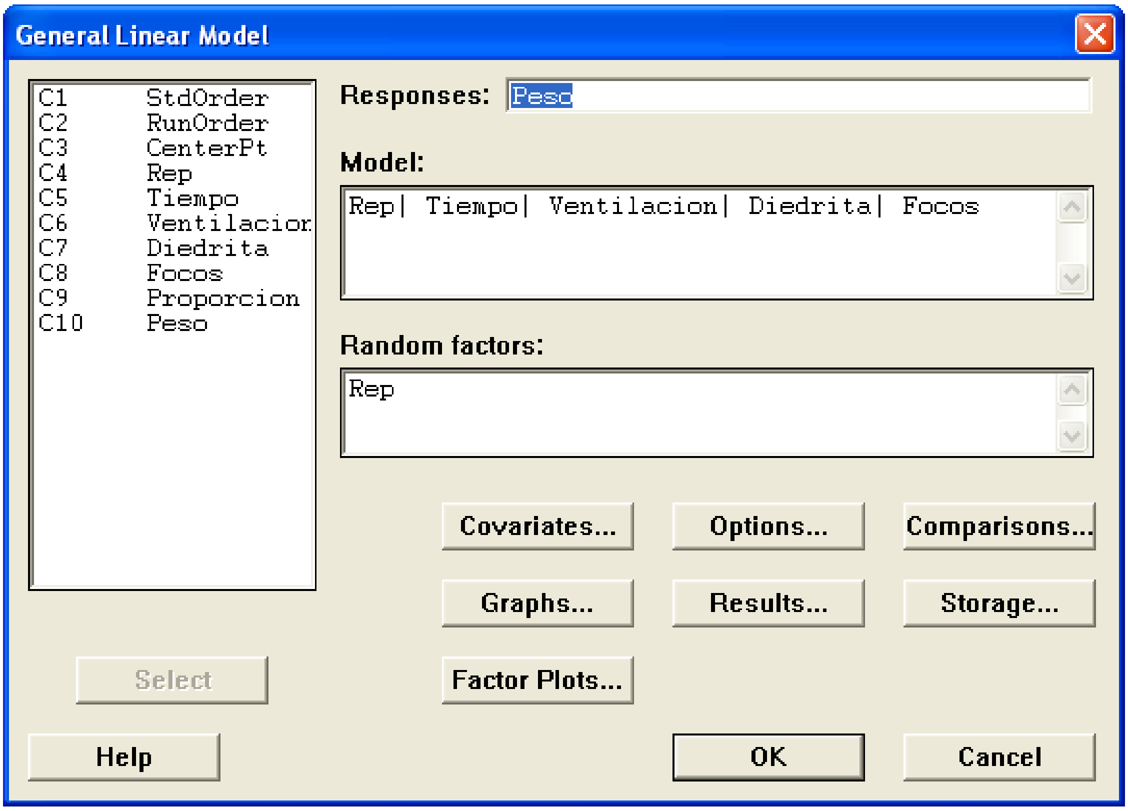
Los valores de -1 y 1 indican los niveles del factor, donde: la ventilación es -1 cuando no se induce y 1 cuando se usa un abanico; la diedrita es -1 cuando no se usa y 1 cuando se pone en la entrada de aire y los focos son -1 cuando es de 40 vatios y 1 cuando es de 60. El tiempo se considera de acuerdo a las horas en que se saco cada muestra. En la misma caja fueron puestas 6 muestras de setas y se saco 1 muestra cada 5 horas para tomar su peso (en gramos), siendo el peso la variable respuesta.

A continuación se presenta el procedimiento de análisis del experimento en Minitab:

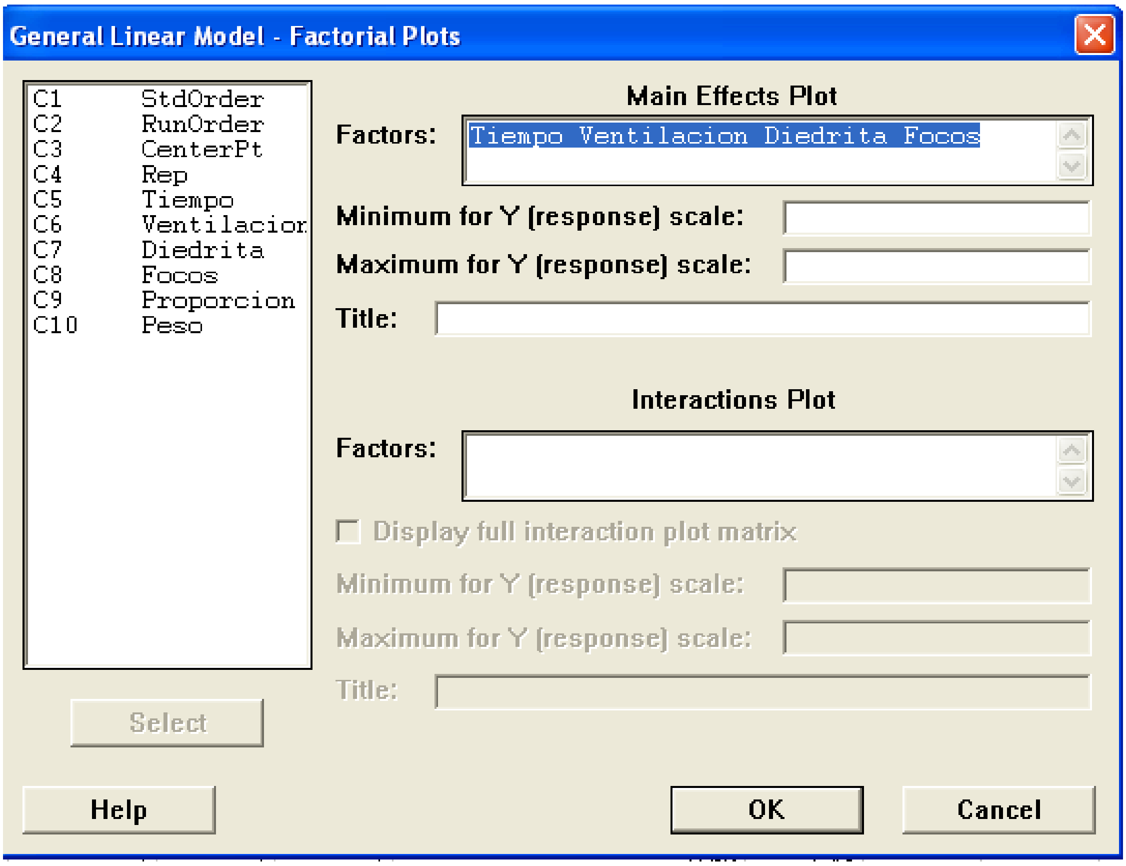
1. En la barra de herramientas, se entra al menú stat y se escoge la opción ANOVA, ésta despliega un menú donde se escoge la opción general linear model como muestra la figura:



2. Luego en la ventana que se abre se ingresa el modelo. Se tiene en cuenta que en un experimento de este tipo hay interacción de todos los factores entre ellos y con las réplicas, para lo cual se utiliza el símbolo | teniendo en cuenta que éste hace que todos los factores interactúen. En la casilla de responses se ingresa la celda peso haciendo doble clic sobre la palabra peso que aparece en la ventana del lado izquierdo, en esa ventana aparecen todas las celdas que están en la hoja de trabajo. Luego en la casilla model se ingresan los factores del modelo teniendo en cuenta que interactúan. En la casilla de random factors se ingresó solo las réplicas porque fue el único factor considerado aleatorio para este experimento.



3. Se hace clic sobre el botón de Factor Plots para ingresar los factores principales y observar el cambio de la respuesta en promedio con respecto al cambio de nivel de cada factor. Esta opción permite ver gráficamente el cambio en la respuesta, en la casilla de factors se ingresan los factores principales, finalmente se oprime ok para esta ventana y la ventana subsiguiente con el fin de obtener resultados.



4. Los resultados obtenidos se muestran en la hoja de session de Minitab.

General Linear Model: Peso versus Rep, Tiempo, ...

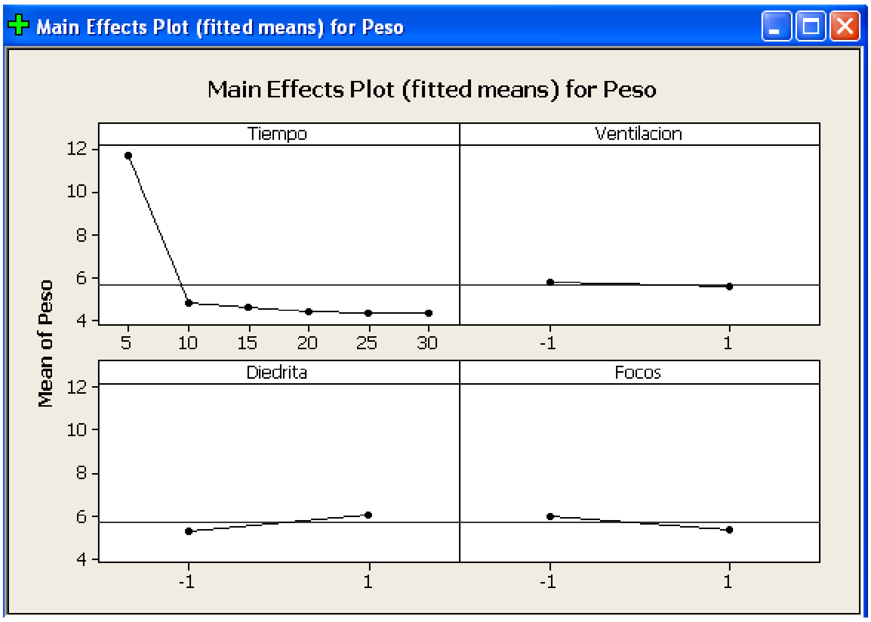
```
Factor        Type    Levels  Values
Rep           random       2  1, 2
Tiempo        fixed        6  5, 10, 15, 20, 25, 30
Ventilación   fixed        2  -1, 1
Diedrita      fixed        2  -1, 1
Focos         fixed        2  -1, 1


Analysis of Variance for Peso, using Adjusted SS for Tests

Source                             DF    Seq SS    Adj SS    Adj MS       F
Rep                                 1    1.7281    1.7281    1.7281      **
Tiempo                              5  698.5910  698.5910  139.7182  296.29
Ventilación                         1    0.8400    0.8400    0.8400    0.26
Diedrita                            1   13.0833   13.0833   13.0833   34.66
Focos                               1    8.9793    8.9793    8.9793   20.15
Rep*Tiempo                          5    2.3578    2.3578    0.4716    1.32
Rep*Ventilación                     1    3.2856    3.2856    3.2856    0.62
Rep*Diedrita                        1    0.3775    0.3775    0.3775    0.13
Rep*Focos                           1    0.4455    0.4455    0.4455      **
Tiempo*Ventilación                  5    0.8865    0.8865    0.1773    0.37
```

Tiempo*Diedrita	5	14.8796	14.8796	2.9759	28.38
Tiempo*Focos	5	57.2298	57.2298	11.4460	29.19
Ventilación*Diedrita	1	6.9338	6.9338	6.9338	1.08
Ventilación*Focos	1	0.3408	0.3408	0.3408	0.11
Diedrita*Focos	1	8.5085	8.5085	8.5085	18.53
Rep*Tiempo*Ventilación	5	2.4045	2.4045	0.4809	0.94
Rep*Tiempo*Diedrita	5	0.5242	0.5242	0.1048	**
Rep*Tiempo*Focos	5	1.9604	1.9604	0.3921	0.69
Rep*Ventilación*Diedrita	1	6.4377	6.4377	6.4377	1.65
Rep*Ventilación*Focos	1	3.1032	3.1032	3.1032	0.66
Rep*Diedrita*Focos	1	0.4593	0.4593	0.4593	0.12
Tiempo*Ventilación*Diedrita	5	1.3299	1.3299	0.2660	5.40
Tiempo*Ventilación*Focos	5	1.4671	1.4671	0.2934	0.35
Tiempo*Diedrita*Focos	5	3.6857	3.6857	0.7371	6.83
Ventilación*Diedrita*Focos	1	2.2265	2.2265	2.2265	0.53
Rep*Tiempo*Ventilación*Diedrita	5	0.2461	0.2461	0.0492	0.13
Rep*Tiempo*Ventilación*Focos	5	4.2483	4.2483	0.8497	2.19
Rep*Tiempo*Diedrita*Focos	5	0.5394	0.5394	0.1079	0.28
Rep*Ventilación*Diedrita*Focos	1	4.2336	4.2336	4.2336	10.93
Tiempo*Ventilación*Diedrita*Focos	5	13.2619	13.2619	2.6524	6.85
Rep*Tiempo*Ventilación*Diedrita*Focos	5	1.9372	1.9372	0.3874	**
Error	0	*	*	*	
Total	95	866.5321			

Source	P	
Rep		
Tiempo	0.000	
Ventilación	0.702	
Diedrita	0.107	
Focos	0.140	
Rep*Tiempo	0.673	x
Rep*Ventilación	0.686	x
Rep*Diedrita	0.890	x
Rep*Focos		
Tiempo*Ventilación	0.851	
Tiempo*Diedrita	0.001	
Tiempo*Focos	0.001	
Ventilación*Diedrita	0.488	
Ventilación*Focos	0.796	
Diedrita*Focos	0.145	
Rep*Tiempo*Ventilación	0.612	x
Rep*Tiempo*Diedrita		
Rep*Tiempo*Focos	0.686	x
Rep*Ventilación*Diedrita	0.449	x
Rep*Ventilación*Focos	0.545	x
Rep*Diedrita*Focos	0.797	x
Tiempo*Ventilación*Diedrita	0.044	
Tiempo*Ventilación*Focos	0.866	
Tiempo*Diedrita*Focos	0.027	
Ventilación*Diedrita*Focos	0.601	
Rep*Tiempo*Ventilación*Diedrita	0.980	
Rep*Tiempo*Ventilación*Focos	0.205	
Rep*Tiempo*Diedrita*Focos	0.907	
Rep*Ventilación*Diedrita*Focos	0.021	
Tiempo*Ventilación*Diedrita*Focos	0.027	
Rep*Tiempo*Ventilación*Diedrita*Focos		
Error		
Total		

El nivel de significancia utilizado en el modelo fue de 0.05 (nivel de significancia tomado por defecto en Minitab) de manera que la hipótesis nula se rechaza cuando el valor P sea menor al nivel de significancia. Según los resultados, los factores en los cuales el cambiar el nivel altera las condiciones del horno son: tiempo, diedrita y foco; aunque el valor P para los factores diedrita y foco indica que variar los niveles para estos factores no es significativo, las interacciones de dos factores para tiempo*diedrita y tiempo*foco indican que si hay diferencia al variar estos factores. Las interacciones de 3 y 4 factores no aportan mayor información pero al observar el valor P para las mismas, se encuentra que la interacción entre tiempo*diedrita*foco resulta ser significativa.

Por los resultados del ANOVA se puede concluir que la respuesta cambia al cambiar los niveles de los factores tiempo, diedrita y foco. Con el fin de evaluar que bajo que niveles se da una mayor perdida de peso, se utilizó el gráfico para los factores principales donde se observa que la mayor perdida de peso se da cuando no hay diedrita y cuando se utiliza un foco de 60 vatios. En cuanto al tiempo se nota una estabilidad aproximada después de las 10 horas de proceso.



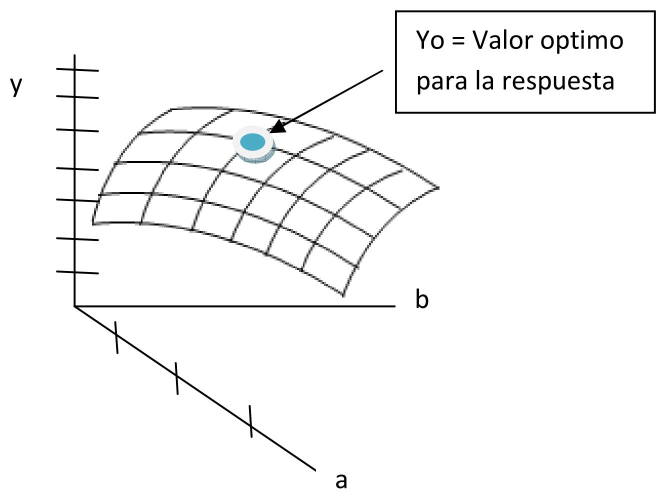
1. Metodología de respuesta

En las secciones anteriores se ha estudiado el comportamiento de la variable respuesta cuando se ve afectada por diferentes factores, sin embargo no se ha tocado el tema a cerca de llegar a la combinación optima de factores y sus niveles de manera que se logre optimizar la respuesta. Las metodologías de superficie de respuesta son usadas para analizar una respuesta de interés que se ve afectada por unas variables y para la cual se necesita llegar a un óptimo.

Suponga que un ingeniero quiere encontrar los niveles de ventilación (a) y humedad (b) que maximizan la respuesta (y) de un proceso. De esta manera la respuesta se ve como una función de las variables a y b:

$$y = f\,(a,b) + e$$

Donde a y b son las variables independientes o factores y e se refiere al error o ruido observado en la respuesta. La figura muestra la superficie de respuesta para la variable **y** en diferentes niveles de las variables independientes a y b. La metodología de respuesta busca llegar al punto óptimo, representado por el punto azul, donde se encuentra la mejor combinación de los factores a y b para la respuesta optima de y.



En ocasiones con un modelo de primer orden se llega a un lugar donde se puede encontrar una respuesta factible, mas no optima. Las respuestas optima generalmente se encuentran en un lugar cóncavo ($\cup$) o convexo ($\cap$) y por lo tanto se encuentra curvatura, de manera que un modelo de primer orden no es suficiente para llegar al óptimo. La metodología simplex es una manera de llegar a un punto óptimo, sin embargo no me permite saber el factor que conduce a ésta respuesta. A continuación se presenta un modelo con el cual se llega a un valor óptimo para la respuesta y se logra identificar el factor que lo condujo allí.

Método de máxima pendiente de ascenso (Steepest Ascent)

Este modelo permite moverse de manera secuencial hacia la respuesta óptima. Si se desea una maximización en la respuesta entonces el modelo se llama máxima pendiente de ascenso porque se mueve en dirección ascendente hasta encontrar el incremento máximo de la respuesta. Si se desea una minimización en la respuesta, el modelo se llamaría máxima pendiente de descenso de manera que se pueda llegar al máximo decremento en la respuesta. Esta metodología consta de los siguientes pasos:

1. Al tener el experimento que se desea hacer, construya un modelo de primer orden como por ejemplo un modelo factorial 2^k y, en lo posible, agregue puntos centrales para observar si existe curvatura.
2. Coteje si existe curvatura. Si no existe, un modelo de primer orden es suficiente, y, a partir de este, se debe buscar el paso que conduzca a la mejora, se debe permanecer en él hasta que no haya evidencia de que se sigue dando la mejora. Si existe curvatura, se debe hacer un modelo de segundo orden con el fin de llegar al óptimo. Para los modelos de segundo orden se tiene la opción de hacer experimentos tipo 3^k sin embargo no son eficientes debido al número de tratamientos que se requieren, además que la precisión del modelo no es igual en todas las direcciones. De esta manera, cuando se requiera un modelo de segundo orden, se recomienda hacer un experimento central compuesto.
3. Una vez se tiene el modelo a seguir se debe determinar el paso de máxima pendiente de ascenso o descenso dependiendo de si se desea maximizar o minimizar la respuesta.
4. En el paso determinado se deben conducir experimentos para observar el cambio en la variable respuesta. Se debe continuar hasta que la variable respuesta no muestre más mejoras, lo cual indicaría entonces que el modelo aplicado ya no tiene buen carácter predictivo.

5. Al llegar al punto donde no hay mas mejoras, se debe construir un modelo de primer orden de nuevo pero con puntos centrales en espera de que los mismos determinen la necesidad de curvatura y entonces se procede a la localización del óptimo. En caso de que la prueba de carencia de ajuste no sea significativa, se hace una búsqueda desde el paso 3. Cuando no mejora más, se intenta entonces un modelo de orden mayor.

Para ilustrar mejor lo descrito anteriormente se realizo el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Un ingeniero industrial está interesado en encontrar las condiciones que maximizan la producción de una línea. El proceso de producción está influenciado por dos variables independientes o factores: Tiempo y temperatura del vapor de agua. Las condiciones actuales muestran que hay una producción de aproximadamente 35% al operar con un tiempo de 35 minutos y una temperatura de 100 grados centígrados. El ingeniero considera que se puede aumentar la producción y desea encontrar los niveles de los factores a los cuales se obtiene un porcentaje óptimo de producción.

Para la solución del problema se siguen los siguientes pasos:

1. Se establecen los niveles de experimentación de las variables independientes y se realiza la experimentación con un modelo de primer orden con puntos centrales para verificar curvatura. Para este caso particular se ajusta un modelo 2^2 con 5 puntos centrales. Los niveles de experimentación para las variables independientes son:

Niveles	Tiempo (A)	Temperatura de vapor (B)
Bajo	30	90
Alto	40	110
Puntos centrales	35	100

2. A continuación se muestra la tabla donde se observan los tratamientos y la respuesta correspondiente para los mismos:

Variables naturales		Variables codificadas		Respuesta
A	B	X_1	X_2	Y
30	90	-1	-1	34.3
30	110	-1	1	35
40	90	1	-1	35.9
40	110	1	1	36.4
35	100	0	0	35.6
35	100	0	0	35.3
35	100	0	0	35.2
35	100	0	0	35.7
35	100	0	0	35.5

3. El análisis para el experimento se hizo en Minitab. El procedimiento es el mismo que se mostró para experimentos 2^k. Al realizarlo se obtuvo la siguiente respuestas:

Factorial Fit: Respuesta versus A, B

```
Estimated Effects and Coefficients for Respuesta (coded units)

Term        Effect     Coef  SE Coef       T      P
Constant           35.4000   0.1037  341.43  0.000
A           1.5000  0.7500   0.1037    7.23  0.002
B           0.6000  0.3000   0.1037    2.89  0.044
A*B        -0.1000 -0.0500   0.1037   -0.48  0.655
Ct Pt               0.0600   0.1391    0.43  0.688


S = 0.207364   R-Sq = 93.86%   R-Sq(adj) = 87.71%


Analysis of Variance for Respuesta (coded units)

Source              DF   Seq SS   Adj SS   Adj MS      F      P
Main Effects         2  2.61000  2.61000  1.30500  30.35  0.004
2-Way Interactions   1  0.01000  0.01000  0.01000   0.23  0.655
  Curvature          1  0.00800  0.00800  0.00800   0.19  0.688
Residual Error       4  0.17200  0.17200  0.04300
  Pure Error         4  0.17200  0.17200  0.04300
Total                8  2.80000
```

Se observa que los factores principales A y B (Tiempo y temperatura de vapor) resultan ser significativos, sin embargo la interacción y la curvatura no. Debido a que no hay significancia en la curvatura se concluye que un modelo de primer orden es suficiente para encontrar el paso de ascenso con el cual se espera llegar a la respuesta óptima. La tabla muestra los coeficientes regresores para cada factor, de esta manera la ecuación que describe el modelo es:

$$Y = 35.4 + 0.75X_1 + 0.30X_2$$

En el modelo se observa que al moverse en X_1 se da un mayor incremento en la respuesta que es el objetivo del experimento, (buscar los niveles óptimos de los factores para lograr una maximización en la respuesta). De esta manera se propone entonces incrementar en un paso de 1 en términos de X_1 y en un paso de una fracción en términos de X_2. La fracción se determina de la siguiente manera:

$$\Delta X_i = \frac{\hat{b}_i}{\left|\hat{b}_j\right|} = \frac{0.30}{0.75} = 0.4$$

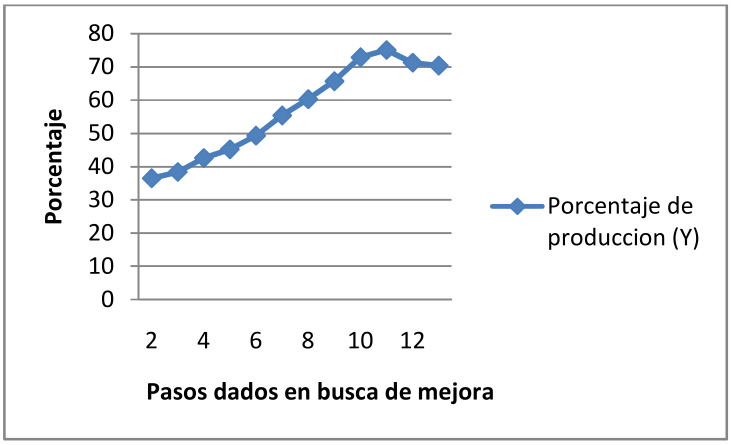
De esta manera los incrementos serian: $\Delta X_1 = 1$ y $\Delta X_2 = 0.4$. Teniendo estos incrementos se procede entonces a verificar como quedarían los niveles de los factores al realizar los incrementos porque los mismos están codificados. Al pasarlo a variables naturales se obtiene:

$$A = \left(\frac{10}{2}\right) * 1 + 35 = 40$$
$$B = \left(\frac{20}{2}\right) * 0.4 + 100 = 104$$

4. Sabiendo entonces el procedimiento para calcular los incrementos en los niveles de las variables o factores, tiempo y temperatura de vapor, se procede a realizar incrementos hasta encontrar que la variable respuesta deje de mostrar mejoras. Esto quiere decir entonces que se deben hacer experimentos en diferentes niveles de las variables de entrada y tomar datos de la respuesta hasta encontrar que la misma deje de incrementar. La siguiente tabla muestra un resumen para las respuestas obtenidas en diferentes niveles de los factores A y B.

	Variables naturales		Variables codificadas		Respuesta
Pasos de ascenso	A	B	X_1	X_2	Y
Origen	35	100	0	0	35.46
Magnitud de incremento	5	4	1	0.4	
Paso 1	40	104	2	0.8	36.5
Paso 2	45	108	3	1.2	38.4
Paso 3	50	112	4	1.6	42.6
Paso 4	55	116	5	2.0	45.2
Paso 5	60	120	6	2.4	49.3
Paso 6	65	124	7	2.8	55.4
Paso 7	70	128	8	3.2	60.3
Paso 8	75	132	9	3.6	65.7
Paso 9	80	136	10	4.0	72.9
Paso 10	85	140	11	4.4	75.1
Paso 11	90	144	12	4.8	71.3
Paso 12	95	148	13	5.2	70.4

La siguiente figura muestra gráficamente la reducción en la respuesta después del paso 10:



Se encuentra entonces que en el paso 10 donde la respuesta es de 75.1 se llega a un valor máximo de la misma. Debido a que se alcanza este valor máximo y no se ve mejora en los pasos siguientes, se determina entonces hacer un nuevo modelo de primer orden para verificar si se debe cambiar el paso o si se ha llegado a un punto donde hay curvatura y se deba ajustar un modelo de segundo orden.

5. Se procede a hacer un nuevo experimento 2^2 teniendo como puntos centrales los valores que maximizan la respuesta en el procedimiento hecho anteriormente. De manera que se establece la temperatura de vapor en 140 grados centígrados y el tiempo en 35 minutos, siendo estos los niveles que se establecen para los puntos centrales. La siguiente tabla muestra el nuevo experimento realizado:

Variables naturales		Variables codificadas		Respuesta
A	B	X_1	X_2	Y
80	130	-1	-1	71.3
80	150	-1	1	73.2
90	130	1	-1	74.1
90	150	1	1	74.5
85	140	0	0	75.1
85	140	0	0	75.8
85	140	0	0	74.9
85	140	0	0	75.2
85	140	0	0	75.6

Teniendo las respuestas se procedió a realizar un análisis en Minitab para observar si se encuentra curvatura. La siguiente tabla muestra los resultados:

Factorial Fit: Respuesta versus A, B

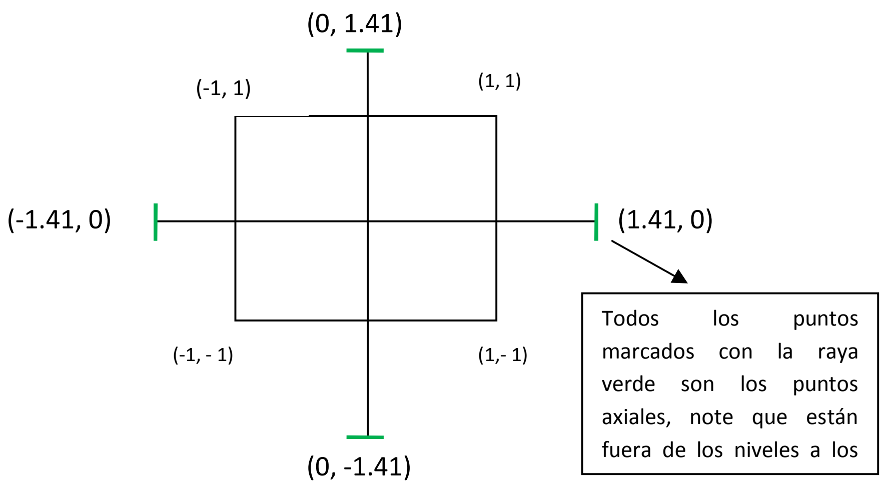
```
Estimated Effects and Coefficients for Respuesta (coded units)

Term       Effect     Coef  SE Coef       T      P
Constant           73.2750   0.1851  395.94  0.000
A          2.0500   1.0250   0.1851    5.54  0.005
B          1.1500   0.5750   0.1851    3.11  0.036
A*B       -0.7500  -0.3750   0.1851   -2.03  0.113
Ct Pt               2.0450   0.2483    8.24  0.001


S = 0.370135   R-Sq = 96.56%   R-Sq(adj) = 93.12%


Analysis of Variance for Respuesta (coded units)

Source              DF   Seq SS   Adj SS   Adj MS      F      P
Main Effects         2   5.5250  5.52500   2.7625  20.16  0.008
2-Way Interactions   1   0.5625  0.56250   0.5625   4.11  0.113
  Curvature          1   9.2934  9.29339   9.2934  67.83  0.001
Residual Error       4   0.5480  0.54800   0.1370
  Pure Error         4   0.5480  0.54800   0.1370
Total                8  15.9289
```

Los resultados muestran un p value de 0.001 para la curvatura, esto nos dice entonces que un modelo de primer orden no es suficiente para llegar al punto optimo, de manera que se concluye que después de analizar los datos con el primer modelo de primer orden hecho, se debe pasar a uno de segundo orden con el fin de llegar a la configuración de factores que dan la respuesta optima para el problema.

6. Se procede entonces a hacer un modelo considerando puntos axiales. El modelo que se usa en este caso para ajustar uno de segundo orden tiene el nombre de diseño central compuesto. El número de puntos axiales que debe existir en el modelo se obtiene multiplicando 2*k, siendo k el numero de factores. De esta manera para este modelo donde se tienen 2 factores, el número de puntos axiales corresponde a 2*2 = 4 puntos. Ahora para encontrar la distancia en valores codificados a los cuales deben ponerse esos puntos se tiene en cuenta lo siguiente:

$$\alpha = (2^k)^{1/4}$$

Donde k corresponde al número de factores. Por lo tanto para este ejemplo particular, la distancia a la que deben estar los puntos axiales es:



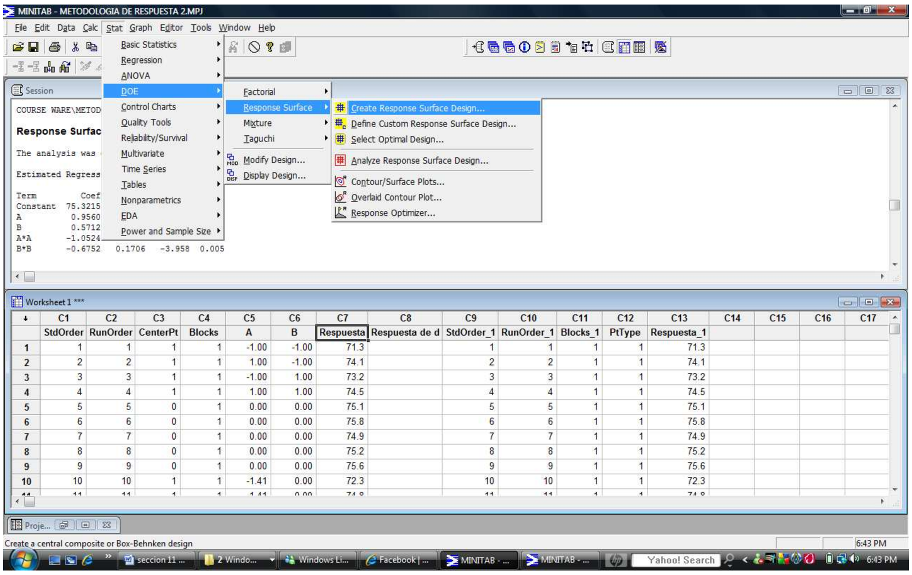
Teniendo entonces los puntos axiales, se procede a realizar el experimento en esos niveles para obtener datos de la respuesta.

La siguiente tabla muestra las respuestas obtenidas, donde se incluyen las respuestas obtenidas en el experimento anterior y las respuestas obtenidas en los niveles de los puntos axiales:

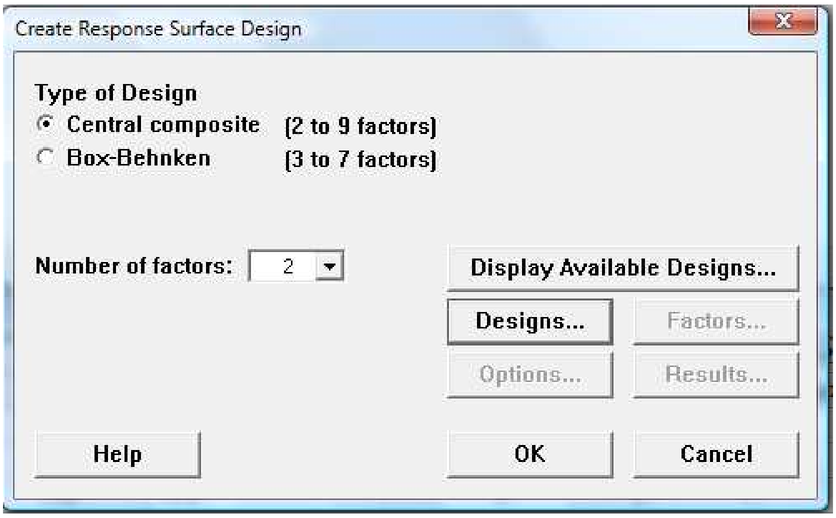
Variables codificadas		Respuesta
X_1	X_2	Y
-1	-1	71.3
-1	1	73.2
1	-1	74.1
1	1	74.5
0	0	75.1
0	0	75.8
0	0	74.9
0	0	75.2
0	0	75.6
-1.41	0	72.3
1.41	0	74.8
0	-1.41	73.5
0	1.41	75.1

7. Teniendo las respuestas, se ingresan los datos a Minitab de la siguiente manera:

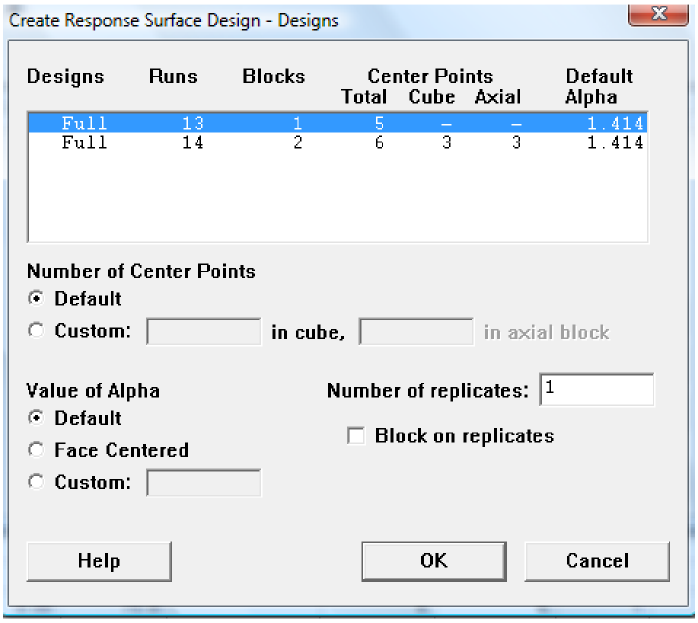
    - En el menú de stat, se hace clik sobre el menú de DOE, luego se hace click sobre la opción de Response Surface, allí se hace click sobre la opción de create a response surface design. La siguiente figura ilustra lo anterior:



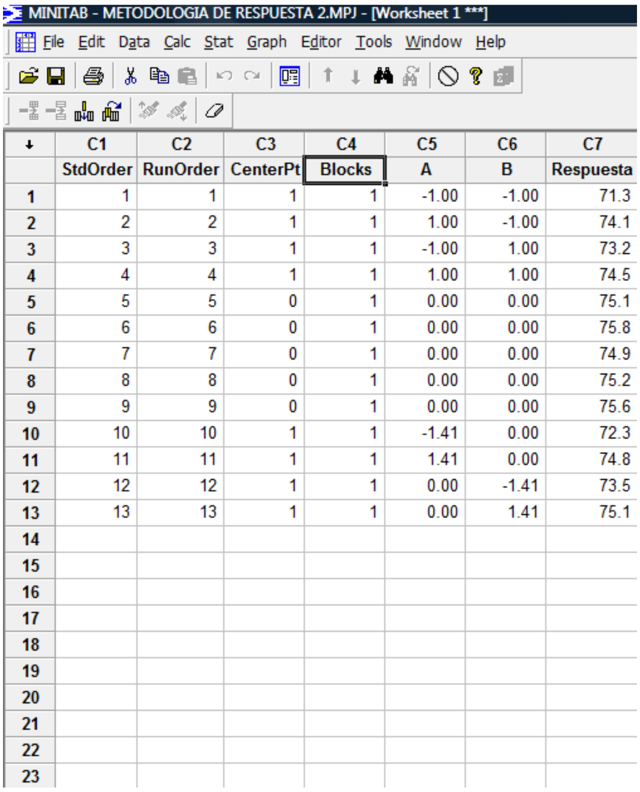
- La siguiente figura, muestra las opciones para realizar el análisis. Para este caso se toma la opción de central composite y se definen los dos factores que se involucraron en el ejemplo:



- Luego se hace click sobre la opción Designs, para definir el tipo de diseño que se desea. La siguiente figura ilustra lo descrito:

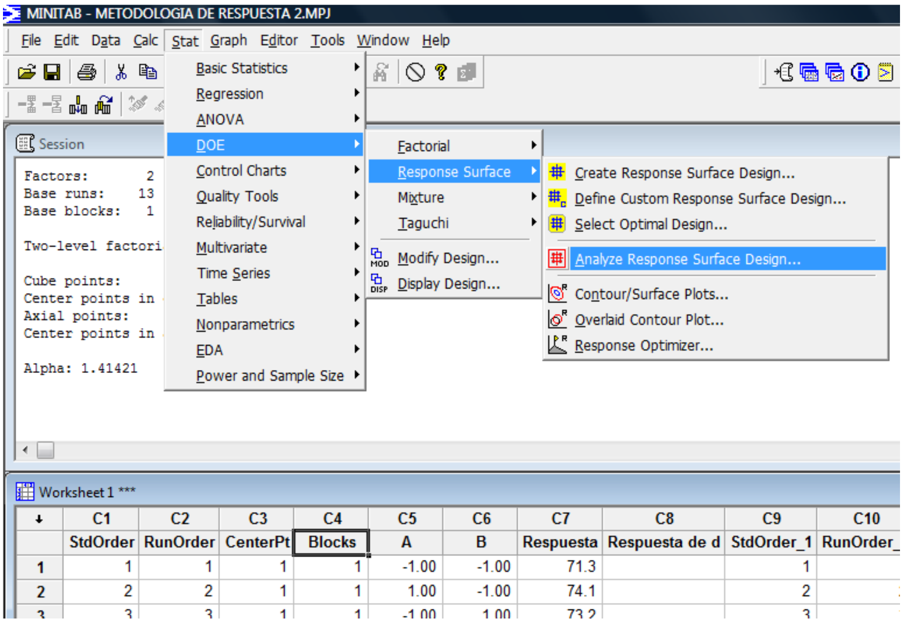


- Al dar click sobre el botón de ok se obtienen los siguientes resultados (se anadio la columna correspondiente a las respuestas):

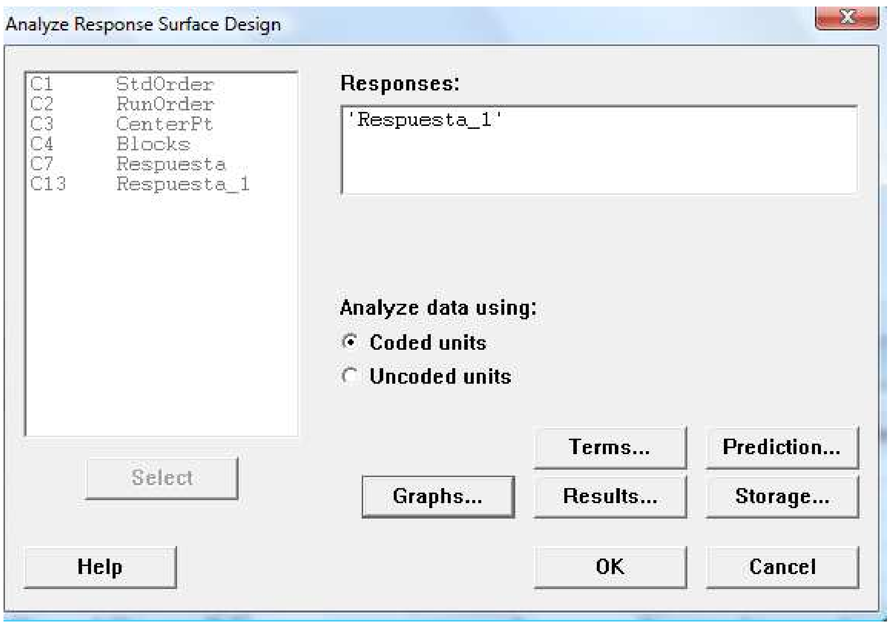


↓	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
	StdOrder	RunOrder	CenterPt	Blocks	A	B	Respuesta
1	1	1	1	1	-1.00	-1.00	71.3
2	2	2	1	1	1.00	-1.00	74.1
3	3	3	1	1	-1.00	1.00	73.2
4	4	4	1	1	1.00	1.00	74.5
5	5	5	0	1	0.00	0.00	75.1
6	6	6	0	1	0.00	0.00	75.8
7	7	7	0	1	0.00	0.00	74.9
8	8	8	0	1	0.00	0.00	75.2
9	9	9	0	1	0.00	0.00	75.6
10	10	10	1	1	-1.41	0.00	72.3
11	11	11	1	1	1.41	0.00	74.8
12	12	12	1	1	0.00	-1.41	73.5
13	13	13	1	1	0.00	1.41	75.1
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							
21							
22							
23							

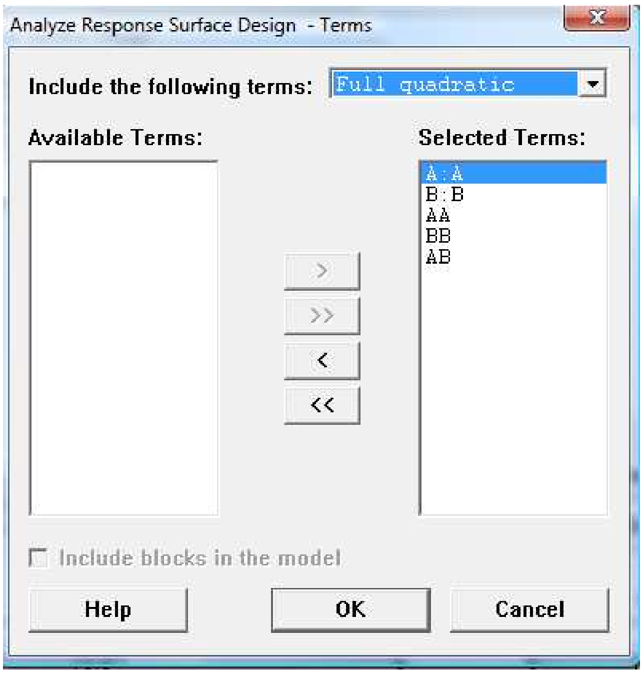
- Teniendo el diseño, se procede a analizar las respuestas. Para el análisis, en el menú de response surface se hace click sobre la opción analyze response surface design, como muestra la siguiente figura:



- Se despliega la siguiente ventana donde se procede a especificar la columna de respuestas y si las variables están en su forma codificada como es el caso de este ejemplo:



- En el menú de terms, se procede a especificar los términos que están incluidos dentro del modelo como muestra la figura:



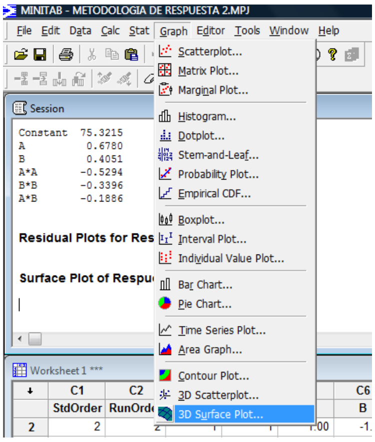
- Al dar clik en el botón de ok, se obtienen los siguientes resultados:

Response Surface Regression: Respuesta_1 versus A, B

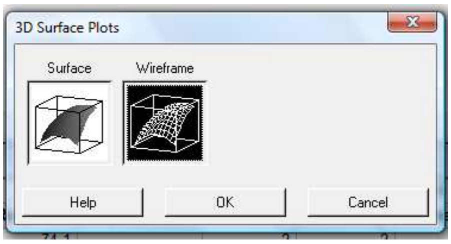
```
The analysis was done using coded units.

Estimated Regression Coefficients for Respuesta_1

Term          Coef  SE Coef        T      P
Constant   75.3215   0.2003  375.959  0.000
A           0.9560   0.1586    6.027  0.001
B           0.5712   0.1586    3.601  0.009
A*A        -1.0524   0.1706   -6.170  0.000
B*B        -0.6752   0.1706   -3.958  0.005
A*B        -0.3750   0.2240   -1.674  0.138

S = 0.4480   R-Sq = 93.5%   R-Sq(adj) = 88.8%


Analysis of Variance for Respuesta_1

Source          DF   Seq SS   Adj SS   Adj MS      F      P
Regression       5  20.1459  20.1459   4.0292  20.08  0.001
  Linear         2   9.8916   9.8916   4.9458  24.64  0.001
  Square         2   9.6918   9.6918   4.8459  24.15  0.001
  Interaction    1   0.5625   0.5625   0.5625   2.80  0.138
Residual Error   7   1.4049   1.4049   0.2007
  Lack-of-Fit    3   0.8569   0.8569   0.2856   2.08  0.245
  Pure Error     4   0.5480   0.5480   0.1370
Total           12  21.5508
```

Se puede ver como los componentes cuadráticos de los factores resultan ser significativos, de manera que un modelo lineal no hubiese podido describir adecuadamente lo que sucede a la respuesta al variar los niveles de los factores. Ademas de esto se observa un componente adicional en el Anova: Lack of fit. Este componente muestra no ser significativo, sin embargo, si lo hubiese sido, implicaría entonces que es necesario aplicar un modelo de mayor orden para describir lo que sucede a la respuesta al variar los niveles de los factores.

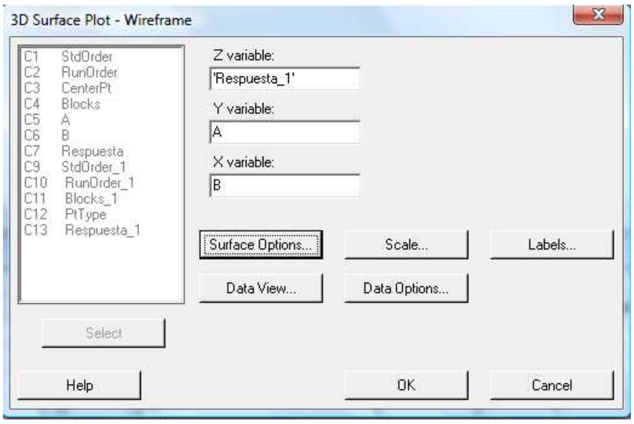
- Para observar lo que sucede a la respuesta cuando se varían los niveles de los factores se realiza entonces el grafico de superficie. En Minitab en el menú de graph se escoge la opción 3D surface plot como muestra la siguiente figura:



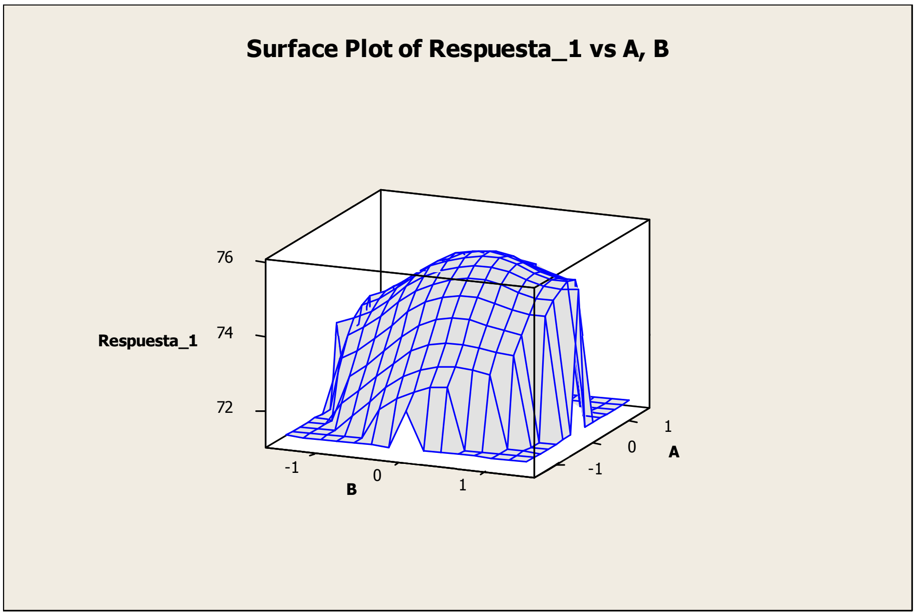
- Luego se escoge el tipo de grafico que se desea como muestra la figura:



- En la siguiente ventana se introducen las columnas correspondientes a la respuesta y los factores:



- Se da click en el botón de ok y se obtiene el siguiente grafico:



Se observa entonces que la respuesta aumenta cuando A esta en su nivel alto y B esta en niveles entre 0 y 1. De manera que el ingeniero debe usar una combinación de estos dos niveles para lograr un incremento en el porcentaje de producción.